MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
– EMELT SZINT –

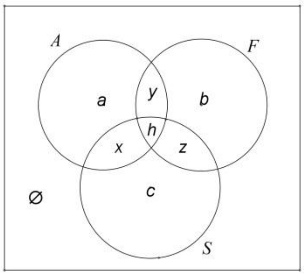
I. rész: Az alábbi 4 feladat megoldása kötelező volt!

1) Egy idegen nyelvekkel kapcsolatos online kérdőívet hetven SG-s töltött ki. Tudja, hogy minden Studium Generale tag beszél legalább egy idegen nyelvet (angol, francia, spanyol). Továbbá azt is tudja, hogy a csak egy idegen nyelvet beszélők száma kétszerese, míg a pontosan két idegen nyelvet beszélők száma négyszerese azokénak, akik mindhárom idegen nyelvet beszélik.

a) Hányan beszélnek pontosan két idegen nyelvet? (5 pont)

b) Tudja még azt is, hogy húsz fő beszél csak angolul és franciául. A húsz fő 25 %-ának van akcentusa.
Hányféleképpen választhat ki egy ötfős bizottságot a csak angolul és franciául beszélők közül úgy, hogy a bizottságban legyen legalább három olyan ember, akinek van akcentusa? (6 pont)

Megoldás:



a) A feladat szövege alapján a következő egyenletek írhatóak fel:

$a+b+c+x+y+z+h=70$ (1 pont)

$a+b+c=2h;\quad x+y+z=4h$ azaz,

$2h+4h+h=70 \Rightarrow h=10$, ebből következik, hogy

$x+y+z=40$ (3 pont)

Tehát pontosan két nyelven **40** ember beszél. (1 pont)

b) A feladat szövegéből kiderül, hogy $20\cdot 0,25=5$ főnek van akcentusa. (1 pont)

A feladat alapján ötből kell kiválasztani legalább három akcentussal rendelkező embert.

$C=\binom{5}{3}\binom{15}{2}+\binom{5}{4}\binom{15}{1}+\binom{5}{5}\binom{15}{0}=1126$ (4 pont)

Tehát **1126-féleképpen** választhatjuk ki a bizottsági tagokat úgy, hogy az eleget tegyen a feladat feltételeinek. (1 pont)

Összesen: 11 pont

2) Egy matematika fakultációs csoportba 12 diák jár. A legutolsó témazáró dolgozatot mindannyian megírták, ennek eredményéről a tanár a következőket mondta: legalább két darab 2-es érdemjegy született. A módusz értéke 3, a mediáné pedig 3,5. A tanár véleménye szerint egy dolgozat akkor kellően nehéz, ha az osztályzatok átlaga e és π ($e = 2,718...$; $\pi = 3,141...$) két tizedesjegyre kerekített értéke között van.

a) Kellően nehéz dolgozat készült a tanár szerint? (8 pont)

b) Mekkora az osztályzatok szórása és terjedelme? (3 pont)

c) Értelmezze a b) pontban kapott eredményeket! (2 pont)

Megoldás:

a) A feladat szövege alapján tudjuk, hogy 12 elemű a mintánk, van benne legalább két darab 2-es osztályzat, leggyakrabban előforduló eleme a 3-as és a sorba rendezett minta hatodik eleme 3 a hetedik eleme pedig 4. Ezeket a szempontokat figyelembe véve megpróbáljuk meghatározni a maradék 8 darab osztályzatot. (2 pont)

- Ha $2; 3; 4$ -es osztályzatok lennének, akkor nem teljesülne a módusz kritériuma. (1 pont)
- Ha $1; 2; 3; 4$ -es osztályzatok lennének, akkor szintén nem teljesülne a módusz kritériuma. (1 pont)
- Ha $1; 2; 3; 4; 5$ -ös osztályzatok lennének, akkor szintén nem teljesülne a módusz kritériuma. (1 pont)
- Ezekből következik, hogy csak $2; 3; 4; 5$ -ös osztályzatok lehetnek, méghozzá csak az alábbi formában: $2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 5$. (1 pont)

Ezekből az osztályzatokból számított súlyozott számtani átlag: $\bar{y} \approx \mathbf{3,58}$ érdemjegy. (1 pont)

Tehát a matektanár szerint a készített dolgozat **nem kellően nehéz**. (1 pont)

b) Az osztályzatok szórása a következő: $\sigma = \sqrt{\frac{2(2-3,58)^2 + ... + 3(5-3,58)^2}{12}} = \frac{\sqrt{155}}{12} \approx \mathbf{1,04}$ érdemjegy. (2 pont)

Az osztályzatok terjedelme: $R = 5 - 2 = \mathbf{3}$. (1 pont)

c) Az osztályzatok átlagosan **1,04** osztályzattal térnek el az átlagos **3,58**-os osztályzattól. A legjobb osztályzat 5-ös, a leggyengébb osztályzat 2-es, a két osztályzat közötti különbség pedig **3**. (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Egy mérnöki rajzhoz rögzített koordinátarendszerben (ahol mindkét tengelyen 100 m az egység) egy új belvárosi hatszög alakú hotel alaprajzának csúcsponti koordinátái rendre a következőek: $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(5;3)$, $D(2;5)$, $E(3;8)$ és $F(0;8)$. A hotelhez tartozó futópálya egyenlete: $y+x=12$. A futópályánál lévő fagyizótól a futópályára merőleges, egyenes sétaút vezet a hotel C pontjában található főbejáratához.

a) Adja meg a fagyizó koordinátáit! (6 pont)

b) Milyen hosszú a hotel főbejárata és a fagyizó közötti távolság? (2 pont)

d) Hány négyzetméter a hotel alapterülete? (5 pont)

Megoldás:

a) A következőket tudjuk: $C(5;3)$ és $\underline{v}_e = \underline{n}_f(1;-1)$

Ebből felírjuk az *f* egyenes egyenletét. $f: y = x-2$ (3 pont)

Ezután az f és e egyenesek metszéspontja meghatározza a fagyizó koordinátáit.
$e: y=-x+12$ és $f: y=x-2 \quad \Rightarrow \quad x=7;\, y=5 \quad \Rightarrow \quad H(7;5)$. (2 pont)

Tehát a fagyizó koordinátái: $\boldsymbol{H(7;5)}$. (1 pont)

b) Kiszámoljuk a két pont távolságát: $\overrightarrow{CH} = \underline{h}-\underline{c} = (2;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CH}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (1 pont)

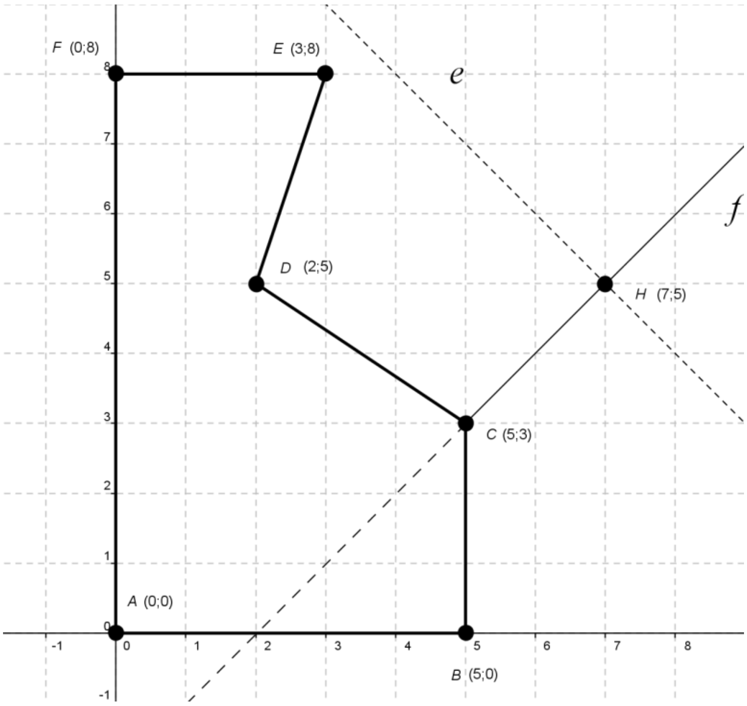
azaz a fagyizó a hotel főbejáratától $\mathbf{200\sqrt{2}\ m}$ távolságra van. (1 pont)

c) A síkidom területét felbontjuk kisebb téglalapok és derékszögű háromszögek területére, amelyeket egyenként ki tudunk számolni. Ebből következik, hogy:

$$T = \left(5\cdot 3 + 2\cdot 5 + \frac{3\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2}\right)\cdot 100^2 = 295000\ \text{m}^2$$ (4 pont)

Azaz a hotel alapterülete $\mathbf{295000\ m^2}$ (1 pont)

A szemléltetés kedvéért:



Összesen: 13 pont

4) Egy pozitív számokból álló számtani sorozatról ismeretes, hogy ha kiválasztja az első *n* elemét, akkor ezek közül az utolsó elem tizenháromszorosa az elsőnek, továbbá az is, hogy az utolsó három elem összege hétszerese az első három elem összegének.
Határozza meg *n* értékét! (14 pont)

Megoldás:

Legyen a sorozat első eleme a_1, különbsége *d*, ebben az esetben a kiválasztott *n* elem közül az első három, illetve utolsó három:

$a_1, \quad a_1+d, \quad a_1+2d, \dots, a_1+(n-3)d, \quad a_1+(n-2)d, \quad a_1+(n-1)d$ (1 pont)

A feladat feltételei szerint:

I. $13a_1 = a_1+(n-1)d \quad \Rightarrow 12a_1 = d(n-1)$ (3 pont)

és még azt tudjuk, hogy:

II. $7(3a_1+3d) = 3a_1+3nd-6d$

az egyenletet a_1-re rendezzük, majd felszorozzuk 2-vel:

$6a_1 = d(n-9) \quad \Rightarrow \quad 12a_1 = 2d(n-9)$ (3 pont)

Az (I.) és (II.) egyenlet összevetéséből

$12a_1 = d(n-1) = 2d(n-9) \quad \Rightarrow \quad d(n-1) = 2d(n-9)$ (2 pont)

A feladat szövegéből tudjuk, hogy $d \neq 0$, ezért leoszthatunk vele. Így kapjuk, hogy: $(n-1) = 2(n-9) \Rightarrow \boldsymbol{n=17}$ (4 pont)

Tehát **17** elemet választottunk ki. (1 pont)

Összesen: 14 pont

Maximális elérhető pontszám: 51 pont

II. rész: Az alábbi 5 példa közül négyet kellett megoldani!

5) Adottak az $f(x)=-(x+1)^3+3$ és $g(x)=-\sqrt{x+1}+3$ függvények.

a) Oldja meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenséget!

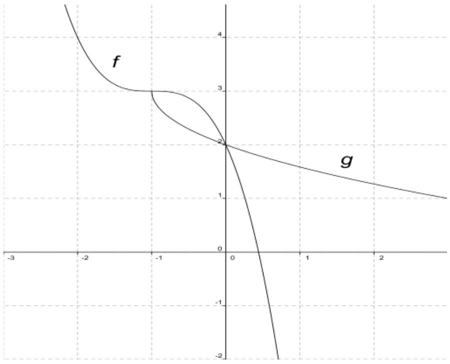
$-(x+1)^3+3\le-\sqrt{x+1}+3$ **(5 pont)**

b) Határozza meg az $f(x)$ függvény értelmezési tartományát és határértékeit az értelmezési tartomány határainál! (3 pont)

c) Határozza meg az $f(x)$ függvény szélsőértékét/szélsőértékeit (stacionárius pontját/pontjait) és a monotonitási szakaszait! (4 pont)

d) Határozza meg az $f(x)$ függvény inflexiós pontját/pontjait és konvexitását! (4 pont)

Megoldás:



a) Legyen $f(x)=-(x+1)^3+3$ és $g(x)=-\sqrt{x+1}+3$.

Az *f* függvény helyes ábrázolása. (1 pont)

A *g* függvény helyes ábrázolása. (2 pont)

Ha felvesszük a két függvényt egy derékszögű koordináta rendszerben, akkor az ábráról jól leolvasható, hogy a kívánt egyenlőtlenség az $\mathbf{x=-1}$ vagy $\mathbf{0\le x}$ intervallum esetén teljesül. (2 pont)

b) Értelmezési tartomány: $D_f=\{\mathbf{x\in\mathbb{R}}\}$ (1 pont)

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)^3+3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}-(x+1)^3+3=-\infty$ (2 pont)

c) Szélsőérték: $f'(x)=-3(x+1)^2\Rightarrow-3(x+1)^2=0\Rightarrow$ $\mathbf{x=-1}$-ben van lehetséges szélsőértéke. (2 pont)

x	$x<-1$	-1	$-1<x$
f'	-	0	-
f	↘	**nincs szélsőértéke**	↘

Tehát $f(x)$ függvény **szigorúan monoton csökkenő**: $\{\mathbf{x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}}\}$ (2 pont)

d) Inflexiós pont: $f''(x)=-6(x+1)^1\Rightarrow-6(x+1)^1=0\Rightarrow$ $\mathbf{x=-1}$ lehetséges inflexiós pont. (2 pont)

x	$x<-1$	-1	$-1<x$
f''	+	0	-
f	$\cup$	**inf. pont**	$\cap$

Tehát a függvénynek **inflexiós pontja** van az $\mathbf{x=-1\,;\,y=3}$ pontban.

Ha $x<-1$ akkor $f(x)$ függvény **konvex**. Ha $-1<x$, akkor $f(x)$ függvény **konkáv**. (2 pont)

Összesen: 16 pont

6) Bizonyítsa be, hogy a $2x^4 - 2x^3 + 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása! (16 pont)

Megoldás:

Rendezzük a kifejezést az alábbi módon: $2x^4 - 2x^3 + 2^x = 0 \Rightarrow 2^x = 2x^3 - 2x^4$ $\Rightarrow 2^x = 2x^3\left(1-x\right)$. (1 pont)

Vizsgáljuk meg az egyenlet bal és jobb oldalának értékkészletét: a bal oldali kifejezés értékkészlete: $y > 0$ (1 pont)

A jobboldali kifejezés értékkészletének vizsgálatát bontsuk négy részre.

- Amikor $x < 0$, akkor a jobb oldali kifejezés értéke $y < 0$. Ebből következik, hogy ezen intervallumon az egyenlőség sosem teljesülhet. (2 pont)
- Amikor $1 < x$, akkor a jobb oldali kifejezés értéke szintén $y < 0$. Ebből következik, hogy ezen intervallumon az egyenlőség sosem teljesülhet (2 pont)
- Amikor $x = 0$ vagy $x = 1$, akkor a jobb oldali kifejezés értéke $y = 0$. Ebből következik, hogy ezen x értékek mellett az egyenlőség sosem teljesülhet. (2 pont)
- Az előzőekből következik, hogy a $0 < x < 1$ intervallumon keressük a jobb oldali kifejezés maximumát. $f\left(x\right) = +2x^3 - 2x^4 \Rightarrow f'\left(x\right) = 6x^2 - 8x^3 \Rightarrow 6x^2 - 8x^3 = 0$ Ebből következik, hogy $x_{1;2} = 0$ és $x_3 = \frac{3}{4}$. (2 pont)

Mivel a vizsgált intervallum nem tartalmazza az $x = 0$ értéket, ezért elég csak az $x_3 = \frac{3}{4}$ helyen vizsgálni a lehetséges szélsőértéket.

x	$x < \frac{3}{4}$	$x = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < x$
f'	+	0	-
f	↗	lokális maximum: $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{27}{128}$	↘

(2 pont)

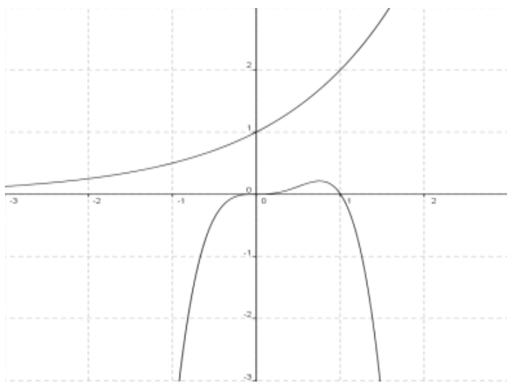
Mivel tudjuk, hogy az $0 < x < 1$ intervallumon a jobb oldali kifejezés lokális maximum $y = \frac{27}{128}$ és tudjuk azt is, hogy ezen az intervallumon a baloldali kifejezés értékkészlete $1 < y < 2$. Ebből következik, hogy ezen az intervallumon sem teljesülhet az egyenlőség. (3 pont)

Ezekből következik, hogy $\mathbf{2x^4 - 2x^3 + 2^x = 0}$ **egyenletnek nincs valós megoldása**. (1 pont)

A szemléltetés kedvéért:

Megjegyzés:

Egy harmadfokú polinomnak három gyöke van, és a hamis gyökök párosával fordulnak elő. Ebből következik, hogy a függvény első deriváltjának három gyöke van.



Összesen: 16 pont

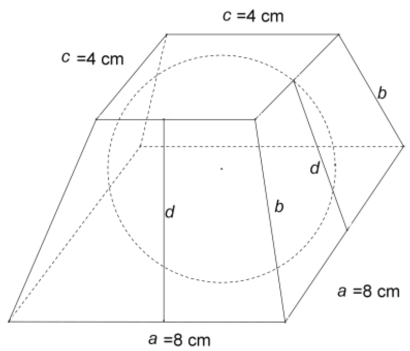
7) Egy négyzet alapú csonka gúla alapéle 8 cm, fedőéle 4 cm hosszú. A csonka gúlába gömb írható.

a) Mekkora a csonka gúla oldaléle? (8 pont)

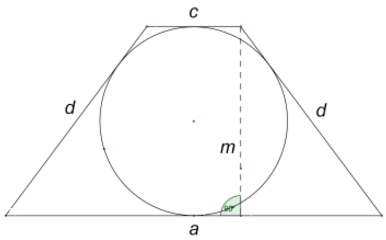
b) Mekkora a beírható gömb sugara? (5 pont)

c) Hány százaléka a gömb térfogata a csonka gúla térfogatának? (3 pont)

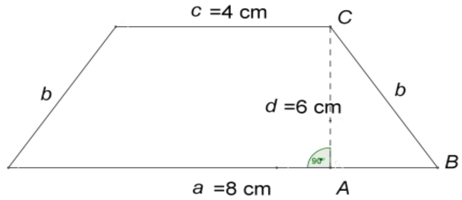
Megoldás:



a) Ha megtekintjük a csonka gúla keresztmetszetét, akkor a következő síkmetszetet látjuk:
Mivel a kör érinti a négyszög oldalait, ezért felírhatjuk az érintőnégyszög-tételt. Azaz $a+c=2d \Rightarrow 8+4=2d \Rightarrow d=6$. (4 pont)

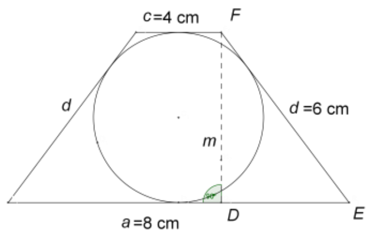


Ezután vesszük a csonka gúla oldalnézetét.
Az ABC csúcspontok által kijelölt derékszögű háromszögre felírható a Pitagorasz-tétel $b^2=2^2+6^2 \Rightarrow b=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\,\text{cm}$. (3 pont)



Tehát a csonka gúla oldaléle $\boldsymbol{b=2\sqrt{10}\,\text{cm}}$ hosszú.(1 pont)

b) Tekintsük meg újra a test keresztmetszetét
A DEF csúcspontok által kijelölt derékszögű háromszögre felírható a Pitagorasz-tétel. $6^2=m^2+2^2 \Rightarrow m=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. (3 pont)
És még tudjuk, hogy $m=2r \Rightarrow r=2\sqrt{2}$. (1 pont)
Azaz a gömb sugara $\boldsymbol{r=2\sqrt{2}=2{,}828\,\text{cm}}$ hosszú. (1 pont)



c) Jelöljük p-vel a két test térfogatának arányát. Ekkor a következőket írhatjuk fel:

$$p=\frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{csonkagúla}}}=\frac{\frac{4r^3\pi}{3}}{\frac{\left(T+\sqrt{Tt}+t\right)}{3}\cdot m}=\frac{\frac{64\sqrt{2}}{3}\cdot\pi}{\frac{\left(64+\sqrt{64\cdot 16}+16\right)}{3}\cdot 4\sqrt{2}}=\frac{1}{7}\pi\approx 0{,}44879$$

. Tehát a gömb térfogata a csonka gúla térfogatának **44,88 %-a**. (3 pont)

Összesen: 16 pont

8) Évinek és Zolinak nyolc darab fekete és négy darab piros üveggolyója van a közös társasjátékukhoz. A fekete üveggolyók közül kettőnek, a piros üveggolyók közül háromnak repedt a felszíne. Éviék a délutáni társasozás előtt kivesznek a dobozból egymás után, visszatevés nélkül négy darab üveggolyót. Az azonos színű üveggolyók között nincsen semmi különbség.
***A* esemény: a kivett üveggolyók között több a piros színű, mint a fekete.**
***B* esemény: a kivett üveggolyók között nem kevesebb a repedt felszínű, mint a nem repedt felszínű.**

a) Mennyi az *A* esemény valószínűsége? (3 pont)
b) Mennyi a *B* esemény valószínűsége? (5 pont)
c) Mennyi a *B* esemény *A* eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége? (8 pont)

Megoldás:

a) A négy kivett golyóból három vagy négy piros. $P(A)=\dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{1}+\binom{4}{4}\binom{8}{0}}{\binom{12}{4}}=\dfrac{1}{15}$.

Tehát az *A* esemény valószínűsége $\mathbf{\dfrac{1}{15}}$. (3 pont)

b) A négy kivett golyóból kettőnek, háromnak vagy négynek repedt a felszíne. $P(B)=\dfrac{\binom{5}{2}\binom{7}{2}+\binom{5}{3}\binom{7}{1}+\binom{5}{4}\binom{7}{0}}{\binom{12}{4}}=\dfrac{19}{33}$. Tehát a *B* esemény valószínűsége $\mathbf{\dfrac{19}{33}}$. (5 pont)

c) A négy kivett golyóból három vagy négy piros, és kettőnek, háromnak vagy négynek repedt a felszíne.

- Direkt módszerrel számolva azt kell szem előtt tartanunk, hogy a négy kivett golyóból háromnak vagy négynek pirosnak kell lennie és ehhez vesszük hozzá azokat az eseteket, amikor ezek között legalább kettőnek repedt az alja. $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}=$

$$\frac{[\text{3p.r.;1f.r.}]+[(\text{3p.r.;1f})(\text{2p.r.;1p.;1f.r.})(\text{3p.r.;1p.})]+[\text{2p.r.;1p.;1f.}]}{(\text{összes eset})}=$$

$$=\frac{\dfrac{\left[\binom{3}{3}\binom{2}{1}\right]+\left[\binom{3}{3}\binom{6}{1}+\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{2}{1}+\binom{3}{3}\binom{1}{1}\right]+\left[\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{6}{1}\right]}{\binom{12}{4}}}{\dfrac{1}{15}}=\frac{\dfrac{1}{15}}{\dfrac{1}{15}}=1$$

. Tehát a *B* esemény *A* eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége **1**.

Megjegyzés:
p.r. = piros és repedt golyó; p = piros golyó; f.r. = fehér és repedt golyó; f = fehér golyó

- Beláthatjuk, hogy ha *A* esemény bekövetkezik, akkor az automatikusan magában hordozza *B* esemény bekövetkezését is. A legkedvezőtlenebb esetben is a kivett golyók közül legalább kettőnek repedt az alja. (2p.r. és 1p. és 1f.). Ebből következik, hogy *B* esemény *A* eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége **1**. (8 pont)

Összesen: 16 pont

9) Timi és nagymamája, Manyi néni a plázából hazafele menet Timi kedvenc körömlakk-márkájának legújabb termékéről beszélgettek. Manyi néni szerint az új termék igen kedvező áron kapható. Timi, miután hazaért, addig kérlelte anyukáját, míg nem kapott elég pénzt a körömlakk megvásárlására. Ezek után Timi a legközelebbi illatszer boltban döbbenten tapasztalta, hogy 66 Ft híján a Manyi néni által említett ár kétszeresébe kerül a hőn áhított körömlakkja. Hosszas vívódás után rájött arra, hogy Manyi néni életkorából fakadóan felcserélte a háromjegyű ár első és harmadik számjegyét.
Mennyit kell Timinek fizetnie a körömlakkért, ha meg akarja venni? (16 pont)

Megoldás:

A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhatjuk fel: $2\cdot\overline{abc}=\overline{cba}+66$. (2 pont)
Mivel a bal oldali kifejezés páros, ezért a jobb oldali kifejezésnek is párosnak kell lennie. Ebből következik, hogy lehetséges, hogy $a=2$, vagy $a=4$, vagy $a=6$, vagy $a=8$. (2 pont)
De mivel a keresett szám háromjegyű ezért $a=2$ vagy $a=4$. (1 pont)
Ha $a=4$, akkor a jobb oldal 0-ra végződik. Ekkor viszont $c=5$ lehet csak, mert a baloldalnak is 0-ra kell végződnie. (2 pont)
De ez lehetetlen, mert ekkor a baloldal értéke nagyobb, mint 800, a jobb oldal értéke pedig kisebb, mint 700. (1 pont)
Ha $a=2$, akkor a jobb oldal 8-ra végződik. Ekkor viszont $c=4$, vagy $c=9$ lehet csak, mert a baloldalnak is 8-ra kell végződnie. (2 pont)
De $c=9$ nem lehet, mert a baloldal kisebb, mint 600, a jobb oldal pedig nagyobb, mint 900. (1 pont)
Ezekből következik, hogy $a=2$ és $c=4$ lehetséges csak. (1 pont)
Ebből következik, hogy $2\left(\overline{2b4}\right)=\overline{4b2}+66\Rightarrow 408+20b=468+10b\Rightarrow 10b=60\Rightarrow b=6$.
(2 pont)
Tehát Manyi néni emlékeiben szereplő ár **264 Ft**, míg a valóságban a körömlakk ára **462 Ft** volt. (1 pont)
Ellenőrzés: $2\cdot 264-66=462\Rightarrow 462=462$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

Maximális elérhető pontszám: 64 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 115 pont