

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS – KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$5^{(2x-1)(x+3)} = 1 \quad (2 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$5^{(2x-1)(x+3)} = 5^0 \Rightarrow \text{az exp. fv. szigorú monotonitása miatt:} \quad (1 \text{ pont})$$

$$(2x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\text{A másodfokú egyenletet megoldva: } x_1 = \frac{1}{2} \text{ és } x_2 = -3 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

2) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

a) Van olyan racionális szám, amelyik nem egész szám. (1 pont)

b) Egy szám osztható tizenhárommal, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó szám háromszorosát, és ez a szám osztható tizenhárommal. (1 pont)

Megoldás:

a) Igaz. (1 pont)

b) Hamis, mert az utolsó szám négyszerese kell. (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Egy marhatenyésztőnek 2500 szarvasmarhája van. A mindenkori állatállomány évenként 5%-kal gyarapszik. Tizennégy év múlva eladja a vejének az akkori állomány felét. Mennyi marhája marad a tenyésztőnek? (Az éppen még születendő állatok nem számítanak.) (2 pont)

Megoldás:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2500 \\ q = 1,05 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{14} = 2500 \cdot 1,05^{13} \approx 4714 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\frac{a_{14}}{2} = 2357 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

4) Oldja meg a következő egyenletet!

$$5 \operatorname{ctg} x = 4 \sin x \quad (3 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$\text{Kikötés: } \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}$$

$$5 \cos x = 4 \sin^2 x \Rightarrow 5 \cos x = 4(1 - \cos^2 x) \Rightarrow 4 \cos^2 x + 5 \cos x - 4 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} (\cos x)_1 = \frac{-5 + \sqrt{89}}{8} = 0,554 & \Rightarrow x_1 = 56,36^\circ + 2 \cdot l \cdot 180^\circ, \text{ ahol } l \in \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow x_2 = 303,64^\circ + 2 \cdot n \cdot 180^\circ, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

$$(\cos x)_2 = \frac{-5 - \sqrt{89}}{8} = -1,804, \text{ de ez nem megoldás, mert } -1 \leq \cos x \leq 1 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 5) Egy körgyűrűcikket 3, illetve 9 cm sugarú körívek határolnak. Területe $18\pi \text{ cm}^2$. Mekkora a körgyűrűcikk középponti szöge? (3 pont)

Megoldás:

$$T_{\text{kgy}} = 9^2\pi - 3^2\pi = 72\pi \text{ cm}^2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$18\pi = \frac{72\pi}{4} \Rightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$\Rightarrow \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 6) Milyen x értékeket vehet fel az alábbi kifejezés?

$$-x^2 - 6x + 7 > 0 \quad (3 \text{ pont})$$

Megoldás:

Behelyettesítve a megoldóképletbe: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 7}}{2 \cdot (-1)}$ (1 pont)

$$\Rightarrow x_1 = -7 \text{ és } x_2 = 1 \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel az x^2 együtthatója negatív, a megoldás a két gyök között lesz: $-7 < x < 1$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 7) A virágosnál egy zsák virágföld 15 kg. Egy másik virágosnál csak 10 kg van egy zsákban és itt 160 Forinttal drágább kilója. Egy zsákért mindkét helyen ugyanannyit kérnek. Mennyibe kerül a drágábbik helyen 1 kg virágföld? (3 pont)

Megoldás:

$$15x = 10(x + 160) \quad (1 \text{ pont})$$

$$5x = 1600 \Rightarrow x = 320$$

$$x + 160 = 480 \text{ Ft} \quad (1 \text{ pont})$$

Szöveges válasz... (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 8) Adja meg a 720 és az 1350 legkisebb közös többszörösét! (2 pont)

Megoldás:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ és } 1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$[720; 1350] = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 10800 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 9) Határozza meg az alábbi kifejezés értékkészletét!

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8} \quad (2 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$(x - 2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} \geq 2 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 10) Egy kör egyik átmérőjének végpontjai $A(5; -1)$, $B(3; 7)$. Írja fel a kör egyenletét! (3 pont)

Megoldás:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (7 + 1)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{A kör sugara: } r = \frac{d}{2} = \sqrt{17}$$

A felezőpontból megkapjuk a kör középpontját:

$$F = \left(\frac{5+3}{2}; \frac{7+(-1)}{2} \right) \Rightarrow O(4; 3) \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{A kör egyenlete: } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 17 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 11) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2x = \sqrt{2-6x} \quad (3 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$\text{Kikötés: } 2-6x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{6} \geq x \Rightarrow \frac{1}{3} \geq x \text{ és } 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, \text{ tehát } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \quad (1 \text{ pont})$$

$$4x^2 = 2-6x \Rightarrow 4x^2 + 6x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} = 0,28 \text{ és } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} = -1,78 \text{ ami nem eleme az ért. tartománynak.} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 12) Egy dobozban 10 pár különböző színű kesztyű van. Véletlenszerűen kiveszünk belőle kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez a két darab kesztyű egy pár lesz? (2 pont)

Megoldás:

Összes eset: 19, hiszen a maradék 19 kesztyűből húzunk egyet. (1 pont)

Kedvező eset: 1, hiszen egyetlen kesztyű passzol a kihúzottéhoz.

$$\text{A keresett valószínűség: } \frac{1}{19} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

Maximális elérhető pontszám: 30

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

- 13) Egy versenyen huszonhárom 5 fős csapat mérte össze erejét és tudását, 3 feladatban.

a) Az első feladatot eddig 11 csapat csinálta meg. A második, ügyességi feladaton már 15 csapat van túl. Csak 7 csapat van, akik mindkettőn részt vettek. Hány csapat van, aki(k) még nem vett(ek) részt az első két feladaton? (3 pont)

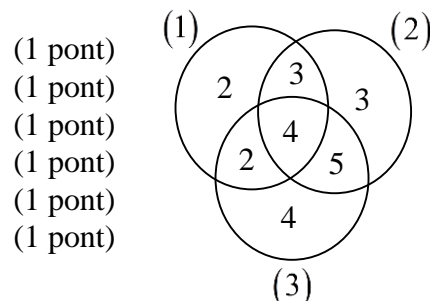
b) Eddig négy olyan csapat volt, akik mind a három feladatot teljesítették. A csapatok közül, akik a 3. feladatrészt megcsinálták, hatan már az elsőn is túl vannak. Kilenc olyan csapat van, akik a 3. és a 2. feladatot is maguk mögött tudhatják. Készítsen halmazábrát a jelenlegi állásról! (6 pont)

c) A résztvevők hány százaléka teljesítette a feladatok legalább $\frac{2}{3}$ részét? (3 pont)

Megoldás:

- a) Csak az 1. feladat: $11 - 7 = 4$ csapat
 Csak a 2. feladat: $15 - 7 = 8$ csapat
 1. és 2. feladat: 7 csapat
 Egyik sem: $23 - 19 = 4$ csapat
 Szöveges válasz...
 b) A feladatot ábrázoljuk Venn-diagramon:
 $x = 7 - 4 = 3$ csapat
 $y = 6 - 4 = 2$ csapat
 $z = 9 - 4 = 5$ csapat
Csak az 1. feladat: $4 - 2 = 2$ csapat
Csak a 2. feladat: $8 - 5 = 3$ csapat
Csak a 3. feladat: $23 - 19 = 4$ csapat
 c) $23 \cdot 5 = 115$ fő
 Legalább 2 feladat:
 $3 + 2 + 4 + 5 = 14 \Rightarrow 14 \cdot 5 = 70$ fő
 $\frac{70}{115} = 0,6087 \Rightarrow 60,87\%$
 Szöveges válasz...

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 7 + 8 = 19 \text{ csapat} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 \text{ pont}) \\ (1 \text{ pont}) \\ (1 \text{ pont}) \end{array}$$



Összesen: 12 pont

- 14) A Nutella gyártója a vevők visszajelzései alapján új üvegbe tölti a csokikrémet. Ez az üveg szabályos henger alakú, az alapkörének átmérője 7 cm, a teteje műanyag.
- a) Hány centiméteres magasságig töltik bele a Nutellát, ha a töltő súlyt nem szeretnék megváltoztatni? (Most 400 gramm Nutella van egy üvegben.) A számolás megkönnyítésére a feladatban az $1 \text{ kg} = 11$ átváltással dolgozzon! (6 pont)
- b) A Nutellás üvegek előállításához 2.500 dm^2 -nyi megrendelt üveg alapanyag áll rendelkezésre minden hónapban. Egy darab régi üveg legyártásához 25 dm^2 -nyi üveget használtak fel. Mennyi nyereségük vagy veszteségük lesz az új alakú üvegek gyártása miatt ebben a hónapban, ha egy üveg Nutella eladási ára 810 Ft volt és az új üveges Nutellát is ugyanennyiért szeretnék adni? (6 pont)

Megoldás:

- a) $d = 0,7 \text{ dm} \Rightarrow r = 0,35 \text{ dm}$ (1 pont)
 $400 \text{ g} = 0,4 \text{ kg} \Rightarrow 0,4 \text{ l} \Rightarrow 0,4 \text{ dm}^3$ (1 pont)
 $V_{\text{henger}} = r^2 \pi \cdot m \Rightarrow 0,4 = 0,35^2 \cdot \pi \cdot m$ (1 pont)
 $\frac{0,4}{0,35^2 \cdot \pi} = m \Rightarrow \frac{0,4}{0,1225 \cdot \pi} = 1,039 \text{ dm} = 10,39 \text{ cm}$ (2 pont)
 Szöveges válasz... (1 pont)
- b) $A_{\text{új üveg}} = 2 \cdot 0,35 \cdot \pi \cdot 1,039 + 0,35^2 \cdot \pi = 2,67 \text{ dm}^2$ (2 pont)
 Új üveg: $2500 \text{ dm}^2 \Rightarrow \frac{2500}{2,67} = 936 \text{ db}$
 Régi üveg: $2500 \text{ dm}^2 \Rightarrow \frac{2500}{25} = 100 \text{ db}$ (1 pont)
 \Rightarrow új: $936 \cdot 810 = 758160 \text{ Ft}$ (1 pont)
 \Rightarrow régi: $100 \cdot 810 = 81000 \text{ Ft}$
 Nyereség: $758160 - 81000 = 677160 \text{ Ft}$ (1 pont)
 Szöveges válasz... (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 15) Egy erdőszetben megmérték 15 fa magasságát és a következő eredményeket jegyezték fel: 100 m, 95 m, 6 m, 64 m, 79 m, 17 m, 81 m, 100 m, 17 m, 8 m, 100 m, 31 m, 91 m, 95 m és 31 m.

a) Határozza meg a 15 fa átlagmagasságát! (2 pont)

b) Az erdőszetben az alábbi táblázat alapján kategorizálják a fákat:

| Magasság | Kategória |
|------------|--------------------|
| 0 – 19 m | facsemete |
| 20 – 39 m | kis fa |
| 40 – 59 m | közepesen magas fa |
| 60 – 79 m | kifejlett fa |
| 80 – 100 m | mamut-fa |

Ennek ismeretében töltsse ki a következő táblázatot! (2 pont)

| Kategória | facsemete | kis fa | közepesen magas fa | kifejlett fa | mamut-fa |
|-----------|-----------|--------|--------------------|--------------|----------|
| Fák száma | | | | | |

c) Készítsen kördiagramot a fák megoszlásáról! Adja meg a körcikkekhez tartozó középponti szögek értékeit is (egészre kerekítve)! (5 pont)

d) Adja meg a magasságok mediánját és móduszát! (3 pont)

Megoldás:

a)
$$\frac{6+8+2\cdot 17+2\cdot 31+64+79+81+91+2\cdot 95+3\cdot 100}{15} = \frac{915}{15} = 61 \text{ m}$$
 (2 pont)

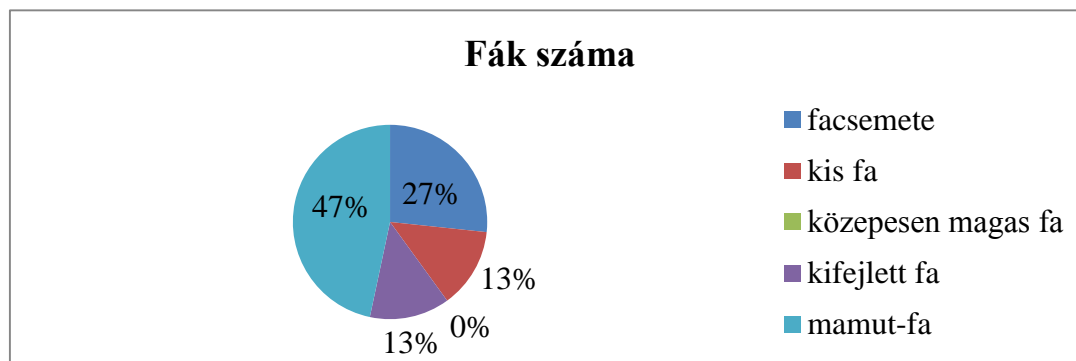
b) A táblázat helyes kitöltése: (2 pont)

| Kategória | facsemete | kis fa | közepesen magas fa | kifejlett fa | mamut-fa |
|-----------|-----------|--------|--------------------|--------------|----------|
| Fák száma | 4 db | 2 db | 0 db | 2 db | 7 db |

c) $360^\circ \Rightarrow 100\% \Rightarrow 15 \text{ fa}$

$24^\circ \Rightarrow 6,67\% \Rightarrow 1 \text{ fa}$ (2 pont)

0 – 19 m: 4 db fa $\Rightarrow 96^\circ$, 20 – 39 m: 2 db fa $\Rightarrow 48^\circ$, 40 – 59 m: 0 db fa $\Rightarrow 0^\circ$, 60 – 79 m: 2 db fa $\Rightarrow 48^\circ$, 80 – 100 m: 7 db fa $\Rightarrow 168^\circ$ (2 pont)



(1 pont)

d) A mediánt az adatok sorba rendezése után kapjuk meg (8. fa): **79** (2 pont)

A módusz a legtöbbször előforduló adat: **100** (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36

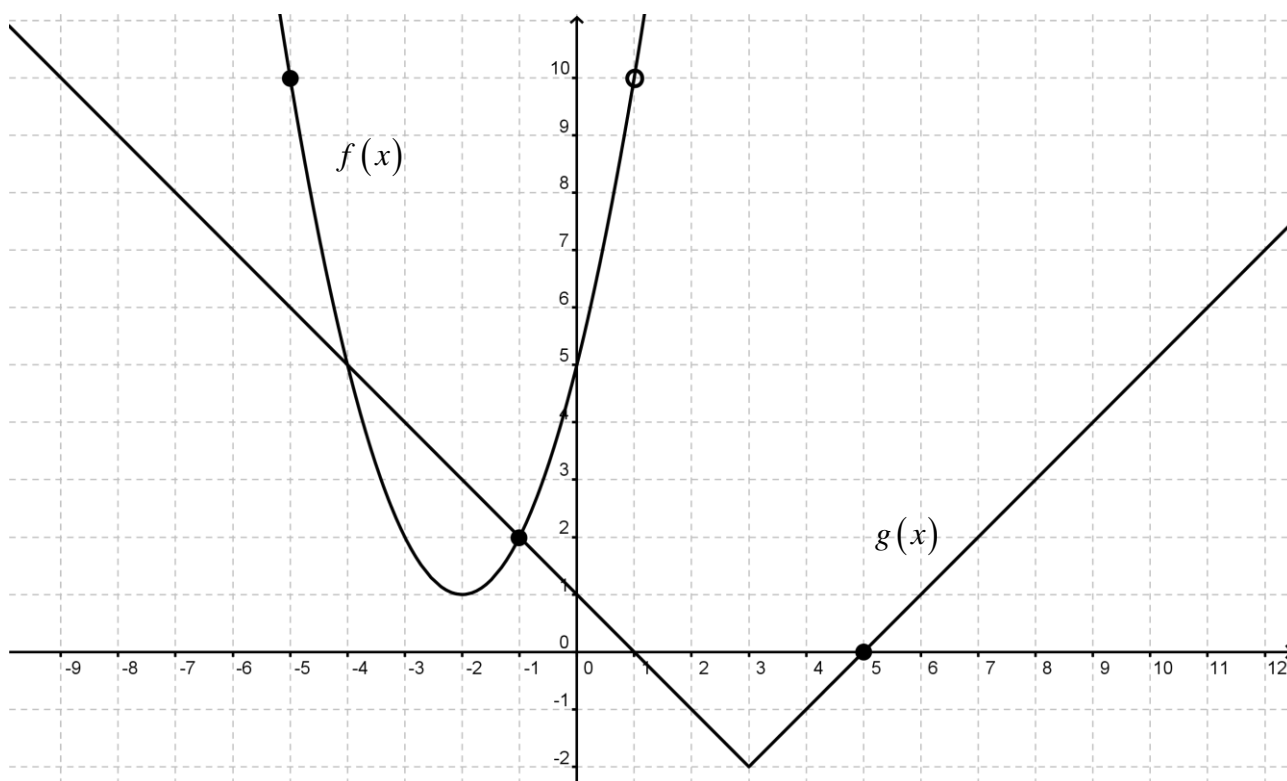
II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16) Adottak az $f(x) = (x+2)^2 + 1$ és a $g(x) = |x-3| - 2$ függvények.

- Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $f(x)$ függvény $-5 \leq x < 1$ intervallumhoz tartozó részét! (3 pont)
- Ábrázolja ugyanebben a koordináta-rendszerben a $g(x)$ függvény $-1 \leq x \leq 5$ intervallumhoz tartozó részét! (3 pont)
- Adja meg az $f(x)$ és a $g(x)$ függvény minimum és/vagy maximum helyeit a teljes értelmezési tartományon és az itt felvett értékeket! (2 pont)
- Oldja meg az $(x+2)^2 + 1 \leq |x-3| - 2$ egyenlőtlenséget! (7 pont)
- Adjon meg egy metszéspontot (ha van)! (2 pont)

Megoldás:

- Az $f(x)$ függvény helyes ábrázolásáért (az intervallumok helytelen jelöléséért 1-1 pont levonás jár!) (3 pont)
- A $g(x)$ függvény helyes ábrázolásáért (az intervallumok helytelen jelöléséért 1-1 pont levonás jár!) (3 pont)



- $f(x)$ szélsőérték helye: $x = -2$, $f(x)$ minimum értéke: $y = 1$ (1 pont)
- $g(x)$ szélsőérték helye: $x = 3$, $g(x)$ minimum értéke: $y = -2$ (1 pont)
- $(x+2)^2 + 1 \leq |x-3| - 2 \Rightarrow (x+2)^2 + 3 = |x-3|$
 $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{ha } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{ha } x < 3 \end{cases}$ (1 pont)

I. eset: $x \geq 3$

$$(x+2)^2 + 3 = x-3 \Rightarrow x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow \text{Diszkrimináns} < 0 \quad (1 \text{ pont})$$

II. eset: $x < 3$

$$x^2 + 4x + 7 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad (2 \text{ pont})$$

$$\Rightarrow x_2 = -4$$

Ellenőrzés! (1 pont)

Összegezve: $-4 \leq x \leq -1$ (1 pont)

A pontos x értékek miatt az ábráról való leolvasásra is megadható a pont.

Szöveges válasz... (1 pont)

e) Metszéspontok: $M_1(-4;5)$ és $M_2(-1;2)$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

17) Az Okmányirodában a nyári nagytakarításkor minden ingóságnak kódszámot adtak, hogy könnyebb legyen a visszapakolás. A kódszámokat a 0, 9, 8, 7 és 6 számjegyek pontosan egyszeri felhasználásával képezték.

a) Hány bútor volt összesen, ha 3 kódszám kivételével az összes képezhető számot kiosztották? (4 pont)

b) A megadott feltételek alapján képezhető összes kódszámot kezeljük számként! Ha véletlenszerűen kiválasztok egyet, mennyi a valószínűsége, hogy olyan kódszám akad a kezembe, ami 5 számjegyű és páratlan? (7 pont)

c) A megadott számokat egyszer felhasználva 4 jegyű számokat képzünk. Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk egyet, akkor 3-mal osztható számot kapunk? (6 pont)

Megoldás:

a) Kódszámokról van szó, így a 0 is lehet bárhol! (1 pont)

$$5! = 120 \quad (1 \text{ pont})$$

$$3\text{-at nem osztottak ki: } 120 - 3 = 117 \quad (1 \text{ pont})$$

Szöveges válasz... (1 pont)

b) Az összes képezhető szám: 120

Mivel számként kezelem a kódszámokat, itt már fontos, hogy nem állhat a 0 az első helyen! (1 pont)

Ahhoz, hogy páratlan legyen a szám, a 9-nek vagy a 7-nek kell az utolsó helyen állnia: (1 pont)

I. eset: 9-es van az utolsó helyen $\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ eset (1 pont)

II. eset: 7-es van az utolsó helyen $\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ eset (1 pont)

A két esetet össze kell adni, hiszen egyszerre nem következhetnek be: $18 + 18 = 36$ (1 pont)

$$\text{A keresett valószínűség: } \frac{36}{120} = 0,3 \quad (1 \text{ pont})$$

Szöveges válasz... (1 pont)

c) Ahhoz, hogy a szám osztható legyen 3-mal, a számjegyek összegének oszthatónak kell lennie 3-mal és mivel 4 jegyű számot keresünk, egy számjegynek ki kell maradnia. (1 pont)

| Kimarad | 0 | 9 | 8 | 7 | 6 |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Számjegyek | 9, 8, 7, 6 | 8, 7, 6, 0 | 9, 7, 6, 0 | 0, 9, 8, 6 | 0, 9, 8, 7 |
| Számjegyek összege | 30 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Osztható-e 3-mal | igen | igen | nem | nem | igen |

Ha a 0 marad ki: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ szám (1 pont)

Ha a 9 marad ki: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ szám (1 pont)

Ha a 6 marad ki: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ szám

$$24 + 18 + 18 = 60 \text{ szám}$$

Összes eset (4 jegyű számok): $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ (1 pont)

$$\text{A keresett valószínűség: } \frac{60}{96} = 0,625 \quad (1 \text{ pont})$$

Szöveges válasz... (1 pont)

Összesen: 17 pont

- Megoldás:**

(1 pont)

(2 pont)

(4 pont)

(1 pont)

(1 pont)

(1 pont)

- (1 pont)

Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100