

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
– KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

- 1) Adja meg az $2x + 1y = 3$ és az $y = 1$ egyenletű egyenesek metszéspontjának (M) koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A metszéspontot a két egyenlet rendszerben való megoldásával kapjuk:

$$2x + 1 \cdot 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \quad (1 \text{ pont})$$

A metszéspont koordinátái: $M = (1; 1)$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

- 2) Egy egyetemi röplabda bajnokságba összesen nyolc csapat nevezett. Hány mérkőzésre kerül összesen sor, ha a helyezések körmérkőzéses rendszerben dőlnek el? (Minden csapat egyszer játszik az összes többi csapattal.) (3 pont)

Megoldás:

Minden csapat hét csapattal játszik: $7 \cdot 8 = 56$ (2 pont)

De csak egyszer játszanak egymással ezért osztani kell 2-vel. (1 pont)

Tehát összesen $\frac{56}{2}$, azaz **28** mérkőzésre kerül sor.

Összesen: 3 pont

- 3) Sorolja fel az A halmaz elemeit, ha $A = \{\text{egyjegyű prímszámok}\}$! (2 pont)

Megoldás:

$$A = \{2; 3; 5; 7\} \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 4) Mekkora annak az egységnyi sugarú körhöz tartozó körív hossza, amelynek központi szöge 90° ? (2 pont)

Megoldás:

A központi szögekre és az ívhosszakra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{Innen } x = \frac{\pi}{2} \quad (2 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 5) Egy rombusz átlóinak hossza 6 és 10 egység. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! (3 pont)

Megoldás:

Az átlók merőlegesek egymásra. (1 pont)

Ezért a skalárszorzat 0. (2 pont)

Összesen: 3 pont

- 6) Hányféle rendszámtábla készíthető 26 betűből és 10 számjegyből, ha egy rendszám 3 betűből és 3 számjegyből áll (pl: AAA-000)! (3 pont)

Megoldás:

Az összes lehetőség: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ (2 pont)

Tehát összesen **17 576 000** különböző rendszámtábla készíthető. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 7) Egy kocka éleinek hossza a . Adja meg a téglatest testátlójának hosszát a megadott éllel kifejezve! (3 pont)

Megoldás:

A lapátló hossza: $\sqrt{a^2 + a^2}$ (1 pont)

A testátló hossza: $\sqrt{a^2 + \left(\sqrt{a^2 + a^2}\right)^2} = a\sqrt{3}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

- 8) Egy budapesti középiskolába 320 diák jár (A halmaz). Ennek az iskolának a 12.b osztályába 20 diák jár (B halmaz). Mekkora az $A \cap B$ halmaz számossága? (2 pont)

Megoldás:

$B \in A$ halmaznak, ezért: (1 pont)

$A \cap B$ számossága: **20**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

- 9) Egy 5 Ft-os érmét egymás után feldobunk, és az eredményeket leírjuk. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége?

A. egy fejet és egy írást dobunk

B. mindkétszer azonos oldalára esik az érme (3 pont)

Megoldás:

A. esemény valószínűsége: $\frac{1}{2}$, mivel nincs a sorrend lekötve a sorrend. (1 pont)

B. esemény valószínűsége: $\frac{1}{2}$, mivel nincs megkötve, hogy írást vagy fejet dobunk kétszer, csak a második dobás kimenete számít. (1 pont)

Tehát **ugyanakkora** a két esemény bekövetkezésének valószínűsége. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 10) Egy budapesti éttermet az ott fogyasztó vendégek egy 1-től 5-ig terjedő skálán értékelhetnek. Egy hétvégén összesen 100 vendég adta le értékelését, melyből 35-en 5-ös (legjobb), 42-en 4-es, 19-en 3-as, a többiek 2-es osztályzatot adtak az étteremnek. Mennyi a leadott értékelések számtani átlaga? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (2 pont)

Megoldás:

4-en adtak 2-es osztályzatot. (1 pont)

$$\frac{35 \cdot 5 + 4 \cdot 42 + 3 \cdot 19 + 2 \cdot 4}{100} = 4,08$$
 (1 pont)

Tehát a leadott osztályzatok számtani átlaga **4,08**.

Összesen: 2 pont

- 11) Egy kisboltban hétféle gyümölcsöt árulnak. Rita ebből háromfélét vesz, mindegyikből 500 g-ot. Hányféle gyümölcskosarat tud Rita összeállítani? (2 pont)

Megoldás:

Rita $\binom{7}{3} = 35$ féleképpen választhat. (1 pont)

Tehát 35 különböző gyümölcskosarat tud összeállítani. (1 pont)

- 12) Péter egy matematika órán az alábbi kijelentést tette:

Ha egy háromszög oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak, akkor az a háromszög derékszögű.

- a) Igaz vagy Hamis ez az állítás?
- b) Adja meg az előbbi állítás megfordítását!
- c) Ez az állítás igaz vagy hamis? (3 pont)

Megoldás:

- a) Igaz (1 pont)
- b) Ha egy háromszög derékszögű, akkor a háromszög oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak. (1 pont)
- c) Hamis (1 pont)

Összesen: 3 pont

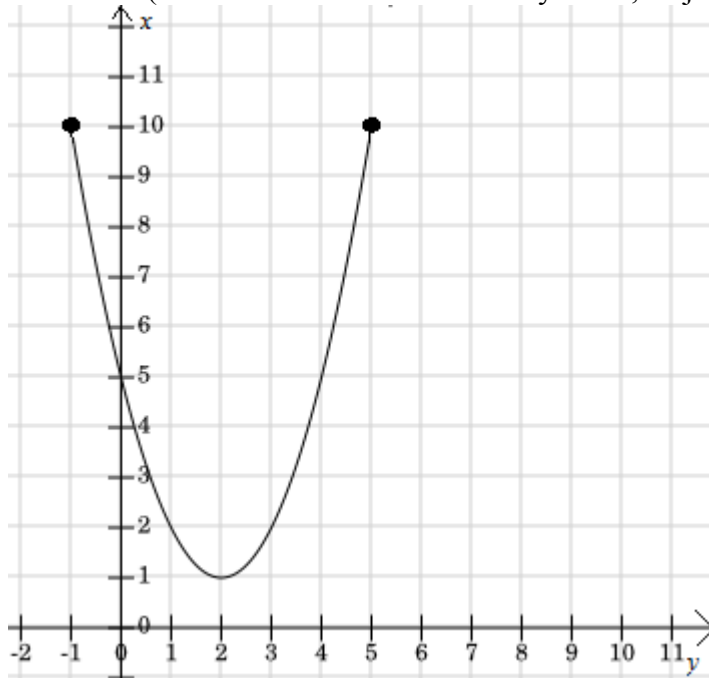
Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!**13.**

- a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $x \rightarrow (x-2)^2 + 1$ egyenletű függvényt a $[-1; 5]$ intervallumon! (3 pont)
- b) Adja meg a fenti függvény minimum értékét, illetve adja meg, hogy hol veszi fel a függvény ezt az értéket! (2 pont)
- c) Oldja meg a $\log_8(x+1) + \log_8(x-1) = 1$ egyenletet a valós számok halmazán! (7 pont)

Megoldás:

- a) Ábrázolás (ha az intervallumhatárok hiányoznak, de jó a megoldás 1 pont adható)



(3 pont)

- b) A minimum helye: $x = 2$

Értéke: $y = 1$

(2 pont)

- c) Kikötés: $x > 1$

(1 pont)

logaritmus azonosságokat felhasználva: $\log_8[(x+1)(x-1)] = \log_8 8$

(2 pont)

nevezetes azonosság: $\log_8(x^2 - 1) = \log_8 8$

(2 pont)

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt: $x^2 - 1 = 8$

(1 pont)

gyökök: $x_1 = 3$, illetve $x_2 = -3$, de a kikötés miatt csak $x_1 = 3$ megoldás.

(1 pont)

Összesen: 12 pont

14. Megkérdeztek 25 fiatal egyetemistát, hogy decemberben hány órát töltöttek internetezéssel. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja:

105	145	47	62	47
41	21	35	40	115
54	44	73	24	56
47	103	37	124	140
142	105	139	37	52

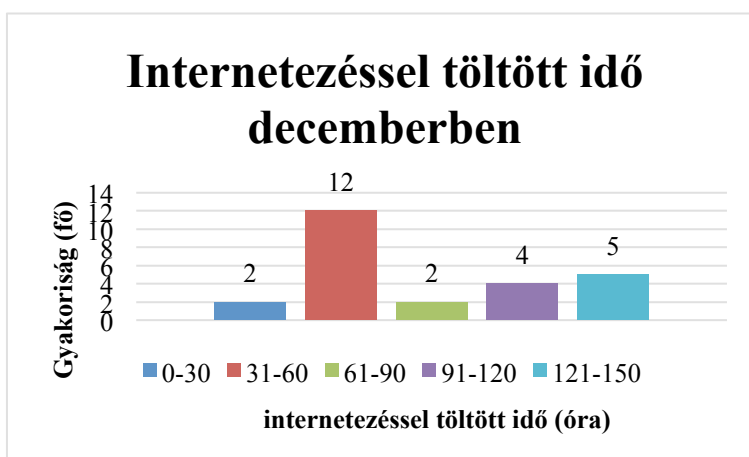
- a) Átlagosan hány órát töltöttek internetezéssel a megkérdezett diákok decemberben? (3 pont)
- b) Ossa 30 óra terjedelmű osztályokba a fenti értékeket, kezdve a 1-30 óra, stb. osztályokkal, és ábrázolja ezeknek az osztályoknak a gyakoriságát oszlopdiagramon! (4 pont)
- c) Adja meg az adathalmaz terjedelmét, mediánját és móduszát, majd utóbbi kettőt értelmezze is! (5 pont)

Megoldás:

- a) Számítási átlag: $\frac{105 + 145 + 47 + 62 + \dots + 139 + 37 + 52}{25} = 73,4$. Tehát átlagosan 73,4 órát töltöttek internetezéssel a megkérdezett hallgatók decemberben. (3 pont)

b)

Internetezéssel töltött idő (óra)	Gyakoriság
1-30	2
31-60	12
61-90	2
91-120	4
121-150	5



(Csak akkor adható maximális pontszám, ha a cím és tengelyfeliratok is vannak.) (4 pont)

- c) Terjedelem: $145 - 21 = 124$. (1 pont)

Módusz: 47, azaz a leggyakrabban előforduló internetezéssel töltött idő 47 óra. (2 pont)

Medián: 54, azaz a megkérdezettek egyik fele 54 óránál kevesebbet internetezett, másik fele pedig 54 óránál többet. (2 pont)

Összesen: 12 pont

15. Orsi kedvenc itala az 55% gyümölcstartalmú narancslé. Mivel otthon már elfogyott ez az ital, lement a boltba, ahol csak kétféle narancslé van: 100%-os és 25% gyümölcstartalmú, mindkettő egyliteres kiszerelésben.

- a) Orsi úgy dönt, hogy elkészíti otthon magának az 55%-os narancslét a boltban kapható narancslevek keverésével. Hány litert vegyen a 100%-os és hányat a 25%-os narancsléből, ha összesen öt liter gyümölcslét szeretne készíteni? (9 pont)
- b) A 100%-os és a 25%-os narancslevek bolti ára rendre 300 és 150Ft/liter, míg Orsi legutóbb 220Ft/liter áron vett 55%-os narancslevet. Hány forint maradt Orsi zsebében annak köszönhetően, hogy magának keverte össze a narancslevet? (3 pont)

Megoldás:

- a) Táblázat megrajzolása:

Gyümölcslé típus	Gyümölcstartalom (l)	Összesen (l)
25%	0,25x	x
100%	5-x	5-x
55%	$0,25x + (5 - x) = 0,55 \cdot 5$	5

(5 pont)

Egyenlet megoldása: $0,25x + (5 - x) = 0,55 \cdot 5$

Átrendezve: $2,25 = 0,75x \Rightarrow x = 3$

(2 pont)

Tehát **a 25%-os narancsléből 3 liter, a 100%-os narancsléből 2 liter kell.**

(1 pont)

Szöveges válasz...

(1 pont)

- b) Mostani vásárlás: $3 \cdot 150 + 2 \cdot 300 = 1050$ Ft

Ha 55%-osat tud venni: $5 \cdot 220 = 1100$ Ft

(2 pont)

Tehát **összesen 50 Ft-ot spórolt.**

(1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!**16. Az alábbi kérdések egy szabályos 18 oldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.**

- a) Mekkora a sokszög belső és külső szögei? (3 pont)
 b) Mekkora a sokszög területe, ha a sokszög beírt körének sugara 20 cm? (8 pont)
 c) Milyen hosszú a legrövidebb átló? (6 pont)

Megoldás:

- a) Belső szögek összege: $(18 - 2) \cdot 180^\circ = 2880^\circ$

$$\text{Ebből egy szög: } \frac{2880^\circ}{18} = 160^\circ$$

$$\text{Külső szögek össze } 360^\circ, \text{ tehát egy külső szög: } \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ \quad (3 \text{ pont})$$

- b) A sokszög 18 egybevágó egyenlőszárú háromszögre bontható, ahol a sokszög egy oldalához tartozó (konvex) középponti szög 20° -os. (2 pont)

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{\overline{AM}}{20} \Rightarrow \overline{AM} \approx 3,5265 \text{ cm} \Rightarrow \overline{AB} \approx 7,053 \text{ cm} \quad (2 \text{ pont})$$

$$T_{AMO} \approx \frac{20 \cdot 3,5265}{2} \approx 35,265 \text{ cm}^2 \Rightarrow T_{ABO} = 2 \cdot T_{AMO} \approx 70,531 \text{ cm}^2$$

$$\text{Innen } T_{\text{sokszög}} = 18 \cdot T_{ABO} = 1269,55 \text{ cm}^2 \quad (3 \text{ pont})$$

Szöveges válasz... (1 pont)

- c) Mivel a sokszög szabályos $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$ (1 pont)

$\angle ABC = 160^\circ$ (lásd: a) pont)

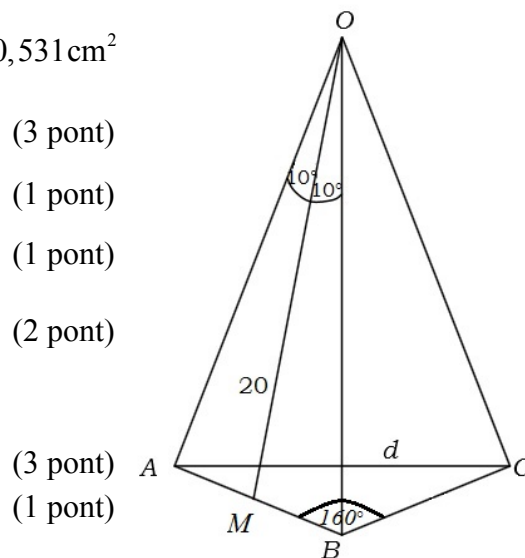
Koszinusz tételt felírjuk ABC háromszögre: (2 pont)

$$d^2 = 7,053^2 + 7,053^2 - 2 \cdot 7,053 \cdot 7,053 \cdot \cos 160^\circ$$

$$\Rightarrow d^2 \approx 192,9793 \text{ cm}^2$$

Tehát $d \approx 13,89 \text{ cm}$ (3 pont)

Szöveges válasz... (1 pont)



Összesen: 17 pont

17. Egy autóversenypálya építésének első napján a munkások összesen 100 méter utat aszfaltoznak le. A második nap 110 métert, a harmadikon 120 métert, majd ezt követően minden nap 10 méterrel többel készülnek el, mint az azt megelőző napon.
- a) Hány méter utat tudnak leaszfaltozni a munkások a hetedik napon? (3 pont)
 - b) A pálya hossza összesen 4200 méter. Hány nap alatt készülnek el, ha a munkások tudják tartani ezt az ütemet és minden nap dolgoznak? (8 pont)
 - c) Hány méter utat fognak leaszfaltozni az utolsó napon? (3 pont)
 - d) Mivel a munkát az eredeti tervekhez képest öt nappal később fejezték be a dolgozók, a kivitelezőnek kötbért kell fizetnie. A kötbér az első napra 100 000Ft, a második naptól pedig az előző napi kötbér 1,01-szerese. Összesen mennyi kötbér terheli a kivitelezőt a késés miatt? (3 pont)

Megoldás:

- a) Számtani sorozat: $a_1 = 100$, $d = 10$
Tehát $a_7 = a_1 + (7-1) \cdot d = 100 + 60 = 160$ méter utat aszfaltoznak le a hetedik napon. (3 pont)
- b) $S_n \geq 4200$ méter
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(100 + 100 + (n-1)10) = 4200$$
 (2 pont)
Átrendezve: $5n^2 + 95n - 4200 = 0$ (2 pont)
Gyökök: $n_1 = 21$, illetve $n_2 = -40$, de $n \geq 1$. (2 pont)
Tehát **21 nap** a helyes megoldás. (1 pont)
Ha a munkások tartják az ütemet, akkor 21 nap alatt készülnek el. (1 pont)
- c) Mivel pont 21 nap alatt végeznek, ezért a 21. napon leaszfaltozott út hosszát kell kiszámolni.
 $a_{21} = a_1 + 20d \Rightarrow a_{21} = 300$ méter (2 pont)
Az utolsó napon 300 méter utat aszfaltoznak le. (1 pont)
- d) Mértani sorozat: $a_1 = 100000$, $q = 1,01$
$$S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}, \text{ ebből } S_5 = 100000 \cdot \frac{1,01^5 - 1}{1,01 - 1} \Rightarrow S_5 = 510100,50.$$
 (2 pont)
Tehát **510101 Ft** kötbér terheli a kivitelezőt. (1 pont)
- Összesen: 17 pont**

18. Gazdaságszociológusok megállapították, hogy a várható élettartam és a bruttó hazai össztermék között az alábbi kapcsolat áll fent: $E = 83 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$, ahol E az átlagos várható élettartam években és a G a bruttó hazai össztermék (GDP) angol fontban megadva.
- Mekkora volt az átlagos várható élettartam abban az országban 2013-ban, ahol a G értéke 2000 angol font volt az adott évben? (4 pont)
 - Hány évvel lesz nagyobb az átlagos várható élettartam ebben az országban 2020-ban, ha tudjuk, hogy G értéke várhatóan a 2013-as érték 2,5-szeresére fog nőni? (5 pont)
 - Egy másik országban 2012-ben az átlagos várható élettartam 70 év volt. Mekkora volt a bruttó hazai össztermék (G) angol fontban megadva? (8 pont)

Megoldás:

- G helyére behelyettesítve: $E_{2013} = 83 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-2000}{6090}}$ (2 pont)
 $E_{2013} = 83 - 5 \cdot 10^{0,6568} \approx 60,31$ év (1 pont)
Tehát az adott országban 2013-ban az átlagos várható élettartam 60,3 év volt. (1 pont)
- $G_{2020} = 2,5 \cdot G_{2013} = 5000$ (1 pont)
 $E_{2020} = 83 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-5000}{6090}}$ (1 pont)
 $E_{2020} = 83 - 5 \cdot 10^{0,1642} \approx 75,70$ év (2 pont)
 $75,70 - 60,31 \approx 15,39$ évvel növekszik 2020-ra a várható élettartam. (1 pont)
- $E_{2012} = 70 = 83 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$ (1 pont)
 Átrendezve: $10^{\frac{6000-G}{6090}} = 2,6$ (2 pont)
 Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $\frac{6000-G}{6090} = 0,415$ (3 pont)
 Ebből: $G_{2012} = 3473$ angol font. (1 pont)
 A másik országban 2012-ben 3473 angol font volt a bruttó hazai termék. (1 pont)
Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100 pont
