

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS – KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

- 1) Adott $A(1;3)$ és $B(-7;9)$ pont. Határozza meg a két pont által alkotott szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A felezőpont első koordinátája: $\frac{-7+1}{2} = -3$ (1 pont)

A felezőpont második koordinátája: $\frac{9+3}{2} = 6$ (1 pont)

Tehát a felezőpont koordinátái: $(-3;6)$

Összesen: 2 pont

- 2) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
 $-\sqrt{2x-25} = -4$ (2 pont)

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $2x-25 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{25}{2}$ (1 pont)

$$\sqrt{2x-25} = 4 \Rightarrow 2x-25 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{41}{2}$$
 (1 pont)

Összesen: 2 pont

- 3) Egy pénzértmet egymás után háromszor feldobunk. Az alábbi kimenetek közül melyiknek van a legkisebb valószínűsége és miért? (3 pont)

- a) Fej, Írás, Fej
- b) Fej, Fej, Fej
- c) Írás, Írás, Fej

Megoldás:

Pénzérme dobás esetén ugyanúgy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dobunk fejet vagy írást. (1 pont)

Így a feladatban közölt mindhárom eset bekövetkezési valószínűsége:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125 \Rightarrow 12,5\%$$
 (1 pont)

Ezért mindhárom eset ugyanolyan valószínűséggel fordul elő. Nincs legkisebb. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 4) Mi az alábbi függvény által felvehető legkisebb és legnagyobb érték?

$$f(x) = (x-4)^2 - 5$$
 (2 pont)

Megoldás:

A függvény képe egy konvex állású parabola.

Legnagyobb, **maximális értéke nincs.** (1 pont)

A legkisebb értékét pedig az $x=4$ helyen veszi föl, melynek értéke: $f(4) = -5$. (1 pont)

Összesen: 2 pont



5) Az alábbi exponenciális kifejezések közül melyik nagyobb?

- a) 81^e
b) 27^π

(2 pont)**Megoldás:**

Ekvivalens átalakítások után megkapjuk, hogy $81^e = (3^4)^e = 3^{4e}$, valamint $27^\pi = (3^3)^\pi = 3^{3\pi}$

(1 pont)

Mivel $3\pi < 4e$ és az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $27^\pi < 81^e$,

ezért az **a) jelű kifejezés nagyobb.**

(1 pont)

Összesen: 2 pont**6) Adja meg az alábbi két kör közös húrjának egyenletét!**

$$(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 64$$

$$(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 81$$

(3 pont)**Megoldás:**

A közös húr egyenletét úgy kapjuk meg, hogy kivonjuk egymásból a körök egyenletét. (1 pont)

$$\text{I.: } x^2 - 4x + 4 + y^2 + 12y + 36 = 64$$

$$\text{II.: } x^2 + 18x + 81 + y^2 - 8y + 16 = 81$$

$$\text{I.} - \text{II.} \Rightarrow -22x + 20y = 40$$

(1 pont)

Tehát a keresett közös húr egyenlete: $-22x + 20y = 40$

(1 pont)

Összesen: 3 pont

7) Anna és Bori kifestenek egy szobát. Tudjuk, hogy Anna egyedül 3 óra alatt végezne a teljes munkával, míg Borinak ez 4 órát venne igénybe. A festést Anna kezdi egyedül. Egy óra elteltével Bori csatlakozik a munkához és közösen fejezik be. Mennyi ideig dolgoznak együtt?

(3 pont)**Megoldás:**

	Anna	Bori
Egész munka időigénye (óra)	3	4
Egy óra alatt elvégzett munka	1/3	1/4

(1 pont)

A feladat szövege alapján felírható az alábbi egyenlet, ahol x jelöli a közösen végzett munka időtartamát.

$$1 \cdot \frac{1}{3} + x \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 1$$

(1 pont)

Rendezés után megkapjuk az $x = \frac{8}{7}$ eredményt.

Tehát $\frac{8}{7}$ órát, azaz kerekítve **68,57 percet** dolgoznak együtt.

(1 pont)

Összesen: 3 pont

- 8) Adja meg a 192 és az 256 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! (2 pont)

Megoldás:

$$192 = 2^6 \cdot 3 \text{ és } 256 = 2^8$$

$$\text{Tehát a legnagyobb közös osztó: } (192; 256) = 2^6 = 64 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Tehát a legkisebb közös többszörös: } [192; 256] = 2^8 \cdot 3 = 768 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 9) Mi az értelmezési tartománya az alábbi kifejezésnek?

$$\frac{\sqrt{3x-6}}{2x-6} \quad (3 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$\text{Nevező miatt: } 2x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Gyök miatt: } 3x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Tehát az értelmezési tartomány: } x \in [2; \infty[\setminus \{3\} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 10) Egy szabályos 17-szög összes átlóját megrajzoljuk. Ezek közül hatot sárgára színezzünk. Mekkora eséllyel lesz egy véletlenszerűen kiválasztott átló sárga színű? (3 pont)

Megoldás:

A szabályos sokszögek átlóinak számát az alábbi összefüggés segítségével számoljuk:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}, \text{ ahol } n \text{ a csúcsok számát jelöli.} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Egy szabályos 17-szögnek } \frac{17 \cdot (17-3)}{2} = 119 \text{ átlója van.} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Mivel 6 sárga átló van, ezért a keresett valószínűség: } P = \frac{6}{119} \approx 0,05. \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 11) Egy számtani sorozat első eleme 6, az első 123 elem összege pedig 23247-tel egyenlő. Adja meg a sorozat differenciáját! (2 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat összegképletét kell alkalmaznunk:

$$S_n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2} \cdot n \Rightarrow \frac{6 + (6 + 122d)}{2} \cdot 123 = 23247 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Az egyenletet rendezve a } d = 3 \text{ megoldásra jutunk.} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

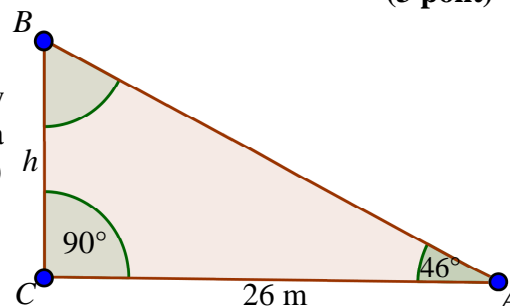


12) Egy 26 méterre álló torony csúcsát 46° -os látószögben látjuk. Milyen magas a torony?
(3 pont)

Megoldás:

A szemléltető, a torony talapzata és csúcsa egy derékszögű háromszöget alkot, melynek egyik befogója 26 méter hosszú.

(1 pont)



A tangens szögfüggvényt alkalmazva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\operatorname{tg} 46^\circ = \frac{h}{26} \Rightarrow h = 26,92, \text{ ahol } h \text{ jelöli a torony magasságát.} \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát **26,92 méter** magas a torony. (1 pont)

Összesen: 3 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont



II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!**13) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!**

a) $|x - 3| = 2x^2 - 6x + 4$ (8 pont)

b) $\cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin^2 x$ (4 pont)

Megoldás:

a) I. $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ (1 pont)

$$x - 3 = 2x^2 - 6x + 4$$

$$2x^2 - 7x + 7 = 0$$
 (2 pont)

$$D = 49 - 56 = -7$$

Tehát az egyenletnek ezen az ágon nincs megoldása. (1 pont)

II. $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$ (1 pont)

$$3 - x = 2x^2 - 6x + 4$$
 (1 pont)

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$
 (1 pont)

Tehát az egyenletnek 2 lehetséges megoldása lesz: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ (1 pont)

b) Kikötés: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (1 pont)

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
 (1 pont)

$$1 = \operatorname{tg} x$$
 (1 pont)

$$x = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \text{ ahol } l \in \mathbb{Z}.$$
 (1 pont)

Összesen: 12 pont

- 14) Egy egyetemi kosárlabda csapatban felmérték a játékosok magasságát. Az adatok centiméterben mérve a következők lettek: 178; 192; 187; 169; 199; 178; 179; 165; 211; 202; 203; 190.
- a) Adja meg és értelmezze a magasságok terjedelmét, móduszát és mediánját! (5 pont)
- b) Számolja ki a négy nevezetes középérték közül a legkisebb és a legnagyobb érték számtani átlagát! A kapott eredményt kerekítse egy tizedesjegyre! (7 pont)

Megoldás:

- a) Terjedelem: $211 - 165 = 46$, azaz a legmagasabb és legalacsonyabb játékosok között 46 cm a különbség. (1 pont)

Módusz: 178, azaz a leggyakrabban előforduló magasság 178 cm. (2 pont)

Medián: $\frac{187 + 190}{2} = 188,5$, azaz a játékosok egyik fele 188,5 cm-nél magasabb, másik fele 188,5 cm-nél alacsonyabb. (2 pont)

- b) A négy nevezetes átlag közül a legkisebb a harmonikus, a legnagyobb pedig a négyzetes. (2 pont)

Harmonikus átlag: (2 pont)

Négyzetes átlag:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 178^2 + 192^2 + 187^2 + 169^2 + 199^2 + 178^2 + 179^2 + 165^2 + 211^2 + 202^2 + 203^2 + 190^2}{12}} =$$
$$= 188,2514 \quad (2 \text{ pont})$$

A két középérték számtani közepe pedig: $\frac{186,74 + 188,2514}{2} = 187,4957 \Rightarrow 187,5$ (1 pont)

Összesen: 12 pont



15) Az alábbi másodfokú függvényt a valós számok halmazán értelmezzük:

$$f(x) = p(x + 16) + 4(p^2 + 4) + 2x(x - 3)$$

- a) Mely p paraméter érték mellett lesz a függvénynek egyetlen zérushelye? (6 pont)
b) Milyen értéket kell adnunk p paraméternek, hogy a függvény görbéje ne metssze az x tengelyt? (6 pont)

Megoldás:

- a) A feladatban megadott függvény képletében felbontjuk a zárójeleket, és rendezzük a tagokat az ismert $ax^2 + bx + c$ alak szerint.

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + x(p - 6) + 4(p + 2)^2 \quad (2 \text{ pont})$$

A függvénynek csak akkor lesz egyetlen zérushelye, ha a diszkrimináns nullával egyenlő.

(1 pont)

$$\Rightarrow (p - 6)^2 - 32(p + 2)^2 = 0$$

(2 pont)

$$\Rightarrow 31p^2 + 140p + 92 = 0$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-140 \pm \sqrt{8192}}{62} = \frac{-70 \pm 32\sqrt{2}}{31} \Rightarrow p_1 = -3,72; p_2 = -0,80 \quad (1 \text{ pont})$$

- b) Ahhoz, hogy a függvény görbéje ne metssze az x tengelyt, a diszkriminánsnak negatív értéket kell felvennie. (1 pont)

$$\Rightarrow (p - 6)^2 - 32(p + 2)^2 < 0$$

(1 pont)

$$\Rightarrow 0 < 31p^2 + 140p + 92$$

Tehát a megoldás: $p < -3,72$ vagy $p > -0,80$ (4 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont



II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16) Egy egyenes alapján álló körkúpba vizet töltöttünk. A vízszint a kúp magasságának felénél áll. A kúp alapkörének átmérője 32 cm, magassága pedig 30 cm.

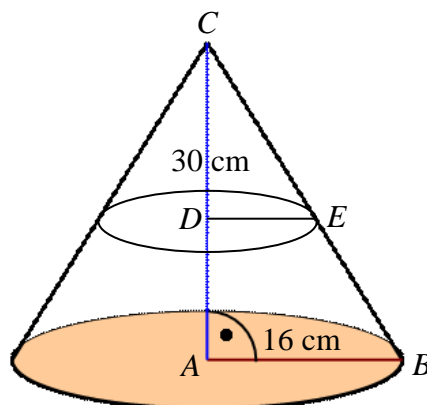
a) Készítsen ábrát a kúpról! (2 pont)

b) Hány százalékat teszi ki a kúuban álló víz térfogata a kúp teljes térfogatának? (6 pont)

c) A zárt kúpot felállítjuk a csúcsára. Ekkor milyen magasan áll a vízszint? A kapott eredményt kerekítse két tizedesjegyre! (9 pont)

Megoldás:

a)



(2 pont)

b) A vízszint a kúp magasságának felénél áll, így DE szakasz pontosan ABC háromszög középvonala, tehát 8 cm hosszú. A víztömeg térfogatát úgy kaphatjuk meg, hogy a teljes kúp térfogatából levonjuk azon kis kúp térfogatát, amely csak levegőt tartalmaz. (Hasonló módon lehet direkt módon a vízzel telt csonkakúp térfogatát is számolni.) (2 pont)

$$V_{\text{víz}} = V_{\text{nagykúp}} - V_{\text{kiskúp}} = \frac{16^2 \cdot \pi \cdot 30}{3} - \frac{8^2 \cdot \pi \cdot 15}{3} = 2240\pi \quad (2 \text{ pont})$$

A százalékos arány tehát: $\frac{2240\pi}{2560\pi} = \frac{7}{8} = 0,875 \Rightarrow \mathbf{87,5\%}$ (2 pont)

Egy másik lehetséges megoldási menetet jelent az arányok felhasználása. Tudjuk, hogy a kis és nagy kúp magasságának aránya $\lambda = \frac{1}{2}$. (2 pont)

Innen tudjuk, hogy térfogataik aránya $\lambda^3 = \frac{1}{8}$. (2 pont)

Tehát a csonkakúp térfogata a nagy kúp térfogatának $\frac{7}{8}$ -a. (2 pont)

c) A csúcsára állított kúp esetén a víztömeg forgáskúp alakot ölt, amely forgáskúp hasonló az eredetihez. Jelölje x azt az arányszámot, amellyel igazzá válik az alábbi egyenlet: (2 pont)

$$2240\pi = \frac{(x \cdot 16)^2 \cdot \pi \cdot (x \cdot 30)}{3} \quad (3 \text{ pont})$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{7}{8}} \quad (1 \text{ pont})$$

A kúp magassága 30 cm, így ezt meg kell szoroznunk a kapott arányszámmal. (1 pont)

Tehát a csúcsára állított kúuban a víz $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot 30 \approx \mathbf{28,69 \text{ cm}}$ magasan áll. (2 pont)

Összesen: 17 pont



- 17) Egy 60 fős középiskolai közösséget vizsgálunk. Tudjuk, hogy a csoport kétharmada lány. A fiúk 18 ember kivételével nem szeretik a matekot. A lányoknak csupán az egynegyede nem szereti a matekot, a többiek imádják. Azon tanulók, akik nem szeretik a matekot, középszinten tesznek belőle érettségi vizsgát. A matekot kedvelő fiúk fele középszinten, a másik fele pedig emelt szinten szeretne érettségizni. A matekot szerető lányok egyharmada tervez középszintű vizsgát tenni, a többiek emeltre mennek.
- a) Összesen hány tanuló fog középszinten érettségizni matekból? (2 pont)
 - b) Mekkora eséllyel megy egy véletlenszerűen kiválasztott fiú emelt szintű matematika érettségire? (4 pont)
 - c) Mekkora eséllyel lesz egy véletlenszerűen kiválasztott tanuló középszinten érettségiző lány? (4 pont)
 - d) Véletlenszerűen választunk két diákot a közösségből. Mekkora az esély arra, hogy mindketten szeretik a matekot, de középszinten érettségiznek? (4 pont)
 - e) A százalékos arányokat tekintve a fiúk vagy a lányok szeretik jobban a matekot? (3 pont)

Megoldás:

- a) A lányok közül tízen, a fiúk közül pedig ketten nem szeretik a matekot, illetve a matekot kedvelők közül 10 lány és 9 fiú tesz középszintű érettségi vizsgát: (1 pont)
 $10 + 2 + 10 + 9 = 31$, tehát összesen **31** tanuló fog érettségizni matekból. (1 pont)
- b) A fiúk összesen húszan vannak, ebből kilencen mennek emelt szintű érettségire: (2 pont)
 $P(B) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{9}{20} = 0,45 \Rightarrow 45\%$ (2 pont)
- c) A tanulók összesen hatvanan vannak. A középszinten érettségiző lányok száma húsz: (2 pont)
 $P(C) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \approx 0,3333 \Rightarrow 33,33\%$ (2 pont)
- d) A matekot kedvelő, de középszinten érettségiző diákok száma 19. Ezért egy tanuló esetén ez az esély: $\frac{19}{60}$. Azonban a második választás függ az elsőtől, valamint itt is teljesülnie kell a feltételnek, de egy diákot már választottunk: (2 pont)
 $P(D) = \frac{19}{60} \cdot \frac{18}{59} \Rightarrow \frac{57}{590} \approx 0,0966 \Rightarrow 9,66\%$ (2 pont)
- e) A százalékos arány a lányoknál: $\frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow 75\%$ (1 pont)
A százalékos arány a fiúknál: $\frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0,90 \Rightarrow 90\%$ (1 pont)
Tehát a fiúknál nagyobb a százalékos arány. (1 pont)

Összesen: 17 pont



- 18) 2013. január elsején beteszünk a bankba 10 millió forintot, 8,5 %-os évi kamatra. Terveink szerint 2021 szeptemberében fogjuk egy összegben kivenni a pénzt. Az első kamat folyósítása a 2013-as év utolsó napján esedékes. A kamatot csak arra az évre írják jóvá, amely során a lekötött pénz kamatokkal együtt végig a bankban maradt.
- a) Mennyi pénzt fog termelni a befektetett összeg végső kivételig? (4 pont)
 - b) Amennyiben 2017 márciusában mégis kivennénk a kamatokból származó többletet, mennyi pénzt tudnánk kivenni az eredetileg rögzített, végső kivételkor? (8 pont)
 - c) Legalább hány évig kellene a bankban hagynunk a pénzt, hogy egy 25 millió forintos lakásra elegendő összeg gyűljön össze? (5 pont)

Megoldás:

- a) Vegyük figyelembe, hogy a 2021-es kamatot nem írja jóvá a bank, mert szeptemberben vettük ki az összeget, ezért csak 8 évnnyi kamattal kell számolni: (2 pont)
A pénz által termelt összeg: $10000000 \cdot 1,085^8 - 10000000 = 9206043$.
Tehát a keresett összeg: **9 206 043 Ft.** (2 pont)
- b) Amennyiben 2017 márciusában kivesszük a kamatokból származó többletet, a bankban bent marad a 10 millió forint. A kérdés az, hogy ha – a banki feltételek változatlanlansága mellett – ez után vesszük ki 2021 szeptemberében az összeget, akkor mennyi pénzt kapunk kézhez: (4 pont)
A 2017-es év végi kamatjótírás törölődik, így leghamarabb 2018 végén termel újra a pénzünk:
 $10000000 \cdot 1,085^3 = 12772891,25 \approx \mathbf{12\,772\,891\,Ft}$ (4 pont)
- c) A feladat szövege alapján az alábbi exponenciális egyenlet írható föl: (1 pont)
 $10000000 \cdot 1,085^n = 25000000$
 $\Rightarrow \log_{1,085} 2,5 = n \approx 11,23$ (3 pont)
Ilyen esetekben a kapott eredményt felfelé kerekítjük, hiszen az eredmény egészrészéhez tartozó év (11) után még nincs elég pénzünk, szükség van az összeg átlépéséhez a 12. évi kamatra is, tehát legalább **12 évig** kellene a bankban hagynunk a pénzt. (1 pont)
Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100 pont

