MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
– EMELT SZINT –

1) Adottak a 0; 1; 1; 1; 2; 4; 5; 7; 7; 8 számjegyek.

a) Hány darab tízjegyű, 5-tel osztható szám készíthető az adott számjegyekből úgy, hogy egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel, tehát minden számjegynek szerepelnie kell egy adott lehetőségben? (6 pont)

b) Ezek között hány olyan szerepel, amikor a 2-es és a 8-as nincsenek egymás mellett? (7 pont)

Megoldás:

a) Egy szám akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik.
I. eset: 0-ra végződik. (1 pont)

__ __ __ __ __ __ __ __ __ $\boxed{0}$

Akkor ez a többi 9 helyen egy ismétléses permutáció a maradék számjegyekből:

$P^{i}_{9;3,2} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = \frac{362880}{12} = 30240$ lehetőség. (1 pont)

II. eset: 5-re végződik.

8 __ __ __ __ __ __ __ __ $\boxed{5}$

Ekkor 0-val nem kezdődhet a szám, hanem a maradék 8 szám valamelyikével, ami 8-féle lehetőség. (1 pont)

A többi helyen pedig 8-féle elem állhat (a 0-át is beleszámítva).

$8\cdot P^{i}_{8;3,2} = 8\cdot\frac{8!}{3!\cdot 2!} = 8\cdot\frac{40320}{12} = 26880$ lehetőség. (1 pont)

A két esetet összeadva $30240 + 26880 =$ **57120 db** szám készíthető, amely 5-tel osztható. (2 pont)

b) Először számoljuk ki, hogy hány olyan eset van, amikor egymás mellett szerepelnek, tehát: (28) vagy (82), így valójában egy „kétjegyű” számról beszélünk.

I. eset: ha 0-ra végződik $\Rightarrow 2\cdot P^{i}_{8;3,2} = 2\cdot\frac{8!}{3!\cdot 2!} = 2\cdot\frac{40320}{12} = 6720$ lehetőség. (2 pont)

II. eset: ha 5-re végződik (és nem áll 0 az első helyen).

$\Rightarrow 2\cdot 7\cdot P^{i}_{7;3,2} = 2\cdot 7\cdot\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 14\cdot\frac{5040}{12} = 5880$ lehetőség. (2 pont)

Tehát $6720 + 5880 = 12600$ esetben áll egymás mellett a 2-es és a 8-as, (1 pont)
így $57120 - 12600 =$ **44520 db** szám esetén nem állnak egymás mellett. (2 pont)

Összesen: 13 pont

2) Legyen adott a koordinátasíkon a következő három pont: $A(-3;4)$; $B(5;-2)$ és $C(1;10)$. Adjon meg egy olyan P pontot koordinátái segítségével, amelyre teljesül, hogy…

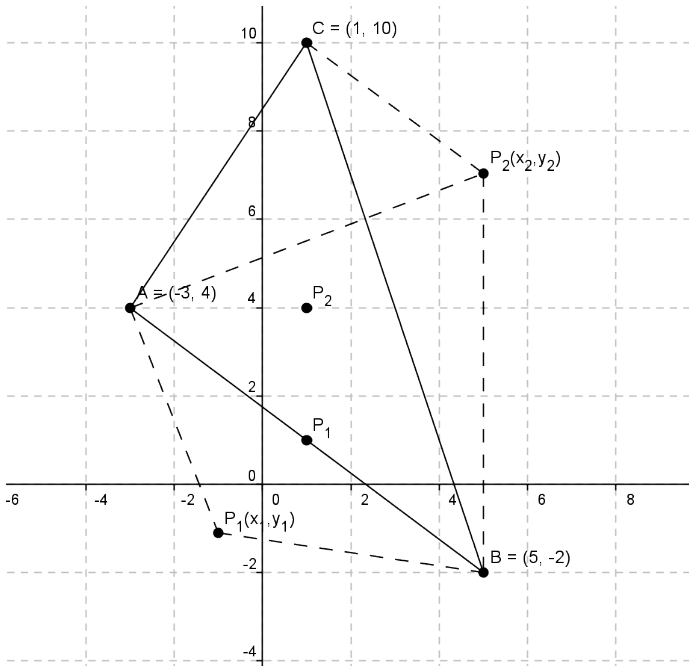
a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$ **(5 pont)**

b) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$ **(4 pont)**

c) Milyen nevezetes pontjai a három pont által meghatározott háromszögnek az a) és b) pontban kapott pontok? (4 pont)

Megoldás:

a)



(1 pont)

A felezőpont definíciója alapján:

$\overrightarrow{P_1A}(-3-x_1;4-y_1)$

$\overrightarrow{P_1B}(5-x_1;-2-y_1)$ (1 pont)

$\overrightarrow{P_1A}+\overrightarrow{P_1B}=(2-2x_1;2-2y_1)=(0;0) \Rightarrow 2-2x_1=0 \quad 2-2y_1=0$

$x_1=1 \quad y_1=1$ (2 pont)

A keresett pont: $\boldsymbol{P_1(1;1)}$ (1 pont)

b) A súlypont definíciója alapján:

$\overrightarrow{P_2A}(-3-x_2;4-y_2)$

$\overrightarrow{P_2B}(5-x_2;-2-y_2)$

$\overrightarrow{P_2C}(1-x_2;10-y_2)$ (1 pont)

$\overrightarrow{P_2A}+\overrightarrow{P_2B}+\overrightarrow{P_2C}=(3-3x_2;12-3y_2)=(0;0) \Rightarrow 3-3x_2=0 \quad 12-3y_2=0$

$x_2=1 \quad y_2=4$ (2 pont)

A keresett pont: $\boldsymbol{P_2(1;4)}$ (1 pont)

c) $\frac{A+B}{2}=\left(\frac{-3+5}{2};\frac{4-2}{2}\right)=(1;1)$ tehát P_1 az $\overline{AB}$ **felezőpontja**. (2 pont)

$\frac{A+B+C}{3}=\left(\frac{-3+5+1}{3};\frac{4-2+10}{3}\right)=(1;4)$ tehát P_2 az ***ABC*** **háromszög súlypontja**. (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

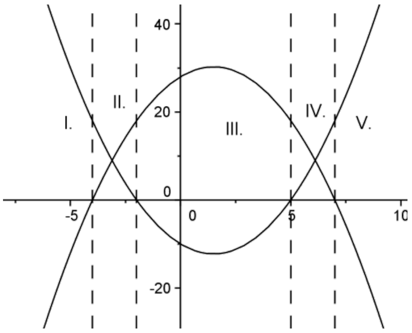
a) $\left|x^2 - 3x - 10\right| - \left|-x^2 + 3x + 28\right| = 0$ **(9 pont)**

b) $\left|x^2 - 3x - 10\right| + \left|-x^2 + 3x + 28\right| = 0$ **(2 pont)**

Megoldás:

a) $\left|x^2 - 3x - 10\right| - \left|-x^2 + 3x + 28\right| = 0$

$\left|(x-5)(x+2)\right| - \left|-(x-7)(x+4)\right| = 0$ (1 pont)



(1 pont)

I. és V. eset, ha $x < -4$ vagy $x \geq 7$

$x^2 - 3x - 10 - x^2 + 3x + 28 = 0 \Rightarrow 18 \neq 0$ ellentmondásra jutottunk. (2 pont)

II. és IV. eset, ha $-4 \leq x < -2$ vagy $5 \leq x < 7$

$x^2 - 3x - 10 + x^2 - 3x - 28 = 0$

$2x^2 - 6x - 38 = 0$ (2 pont)

$x^2 - 3x - 19 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{megoldva}: x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{85}}{2} \quad \Rightarrow x_1 \approx 6{,}11 \in \text{ÉT}; x_2 \approx -3{,}11 \in \text{ÉT}$

III. eset, ha $-2 \leq x < 5$

$-x^2 + 3x + 10 + x^2 - 3x - 28 = 0 \Rightarrow -18 \neq 0$ ellentmondásra jutottunk. (2 pont)

A megoldás tehát, az eseteket összegezve: $\boldsymbol{x \in \left\{\dfrac{3-\sqrt{85}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{85}}{2}\right\}}$ (1 pont)

b) $\left|x^2 - 3x - 10\right| + \left|-x^2 + 3x + 28\right| = 0$

Mivel két abszolútérték összege csak akkor 0, ha mindkettő 0, ezért vizsgáljuk a zérushelyeket, amelyek a következők:

$\begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{matrix}$ és $\begin{matrix} x_3 = 7 \\ x_4 = -4 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ megállapíthatjuk, hogy a két abszolútérték nem lesz egyszerre 0

(1 pont)

Tehát **nincs olyan valós *x*, amely kielégíti az egyenletet**. (1 pont)

Összesen: 11 pont

4) Az egész számok halmazán tekintsük a következő tulajdonságú halmazokat:

$A_3 = \{\textbf{a 3-mal osztható egész számok}\}$

$A_4 = \{\textbf{a 4-gyel osztható egész számok}\}$

$A_{11} = \{\textbf{a 11-gyel osztható egész számok}\}$.

Hány olyan egész szám található 895 és 2012 között, amely a megadott halmazok közül…

a) pontosan egynek eleme; **(3 pont)**

b) pontosan kettőnek eleme; **(3 pont)**

c) mindháromnak eleme; **(3 pont)**

d) egyiknek sem eleme? **(5 pont)**

Megoldás:

Felírható pontosan 7 db 895 és 2012 közé eső számtani sorozat, melyeknek differenciái rendre: 3; 4; 11; $(3\cdot 4)=12$; $(3\cdot 11)=33$; $(4\cdot 11)=44$; $(3\cdot 4\cdot 11)=132$. Tehát ezek alapján kiszámolhatóak az elemszámok. Fontos, hogy a 895 és a 2012 nem esnek bele a vizsgált halmazokba!

A_3 esetén: $2010 = 897 + 3\cdot(n-1) \Rightarrow n = 372 \Rightarrow |A_3| = 372$

A_4 esetén: $2008 = 896 + 4\cdot(n-1) \Rightarrow n = 279 \Rightarrow |A_4| = 279$

A_{11} esetén: $2002 = 902 + 11\cdot(n-1) \Rightarrow n = 101 \Rightarrow |A_3| = 101$

$A_3 \cap A_4$ esetén: $2004 = 900 + 12\cdot(n-1) \Rightarrow n = 93 \Rightarrow |A_3 \cap A_4| = 93$

$A_3 \cap A_{11}$ esetén: $1980 = 924 + 33\cdot(n-1) \Rightarrow n = 33 \Rightarrow |A_3 \cap A_{11}| = 33$

$A_4 \cap A_{11}$ esetén: $1980 = 924 + 44\cdot(n-1) \Rightarrow n = 25 \Rightarrow |A_4 \cap A_{11}| = 25$

$A_3 \cap A_4 \cap A_{11}$ esetén: $1980 = 924 + 132\cdot(n-1) \Rightarrow n = 9 \Rightarrow |A_3 \cap A_4 \cap A_{11}| = 9$

a) $|A_3| + |A_4| + |A_{11}| - 2\cdot|A_3 \cap A_4| - 2\cdot|A_3 \cap A_{11}| - 2\cdot|A_4 \cap A_{11}| + 3\cdot|A_3 \cap A_4 \cap A_{11}| =$

$= 372 + 279 + 101 - 186 - 66 - 50 + 27 = 477$ (2 pont)

477 db egész szám szerepel a 895 és a 2012 között, amelyre egy tulajdonság igaz. (1 pont)

b) $|A_3 \cap A_4| + |A_3 \cap A_{11}| + |A_4 \cap A_{11}| - 3\cdot|A_3 \cap A_4 \cap A_{11}| = 93 + 33 + 25 - 27 = 124$ (2 pont)

124 db egész szám szerepel a 895 és a 2012 között, amelyre két tulajdonság igaz. (1 pont)

c) A fenti számításokból adódik, hogy **9 db** egész szám szerepel a 895 és a 2012 között, amelyre három tulajdonság igaz. (3 pont)

d) Szita formula alapján számolva:

$|A_3| + |A_4| + |A_{11}| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_{11}| - |A_4 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_4 \cap A_{11}| =$

$= 372 + 279 + 101 - 93 - 33 - 25 + 9 = 610$ (1 pont)

610 darab egész szám van a 895 és a 2012 között, amely rendelkezik valamelyik fenti tulajdonsággal. (1 pont)

$2012 - 895 = 1117 \Rightarrow$ 1116 db szám van a két szám között. (1 pont)

$1116 - 610 = 506$ (1 pont)

Tehát **506 db** szám van a 895 és a 2012 között, amelyre egyik tulajdonság sem igaz. (1 pont)

Megjegyzés: Ezeket Venn-diagrammal is meg lehet adni az elemszámok kiszámítása után, de a külső elemszámra itt is mindenképpen alkalmazni kell a szita-formulát. Az a), b), c) feladatrészekre a válaszok pedig egyszerű összeadással kijönnek.

a) $255 + 170 + 52 = 477$

b) $84 + 24 + 16 = 124$

c) 9

A pontszám természetesen ezen módszer alkalmazása esetén is jár.

Összesen: 14 pont

Maximális elérhető pontszám: 51 pont

5) Hat lány az alábbi mennyiségű órát tölti a konditeremben hetente:

Anna	**4**
Klaudia	**1,2**
Saci	
Kata	**2,4**
Dóri	**3**
Judit	**6**

Tudjuk még azt is, hogy a harmonikus átlag: 1,8461.

a) Számítsa ki, hogy Saci mennyi időt tölt az edzőteremben egy héten! (4 pont)

b) Mekkora a szórás és a medián? Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

c) Ábrázolja hisztogramon a lányok konditerem-látogatási szokásait! (3 pont)

d) Mennyivel változik a számtani átlag, ha Saci háromszor annyi időt tölt edzéssel, mint eddig? (3 pont)

Megoldás:

a) A harmonikus átlag kiszámítási módja az értékek behelyettesítésével:

$$\frac{6}{\frac{1}{4}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2,4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=1,8461$$ (2 pont)

Rendezve:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2,4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=3,25 \Rightarrow \frac{1}{x}=1,25$$ (1 pont)

$x=0,8$

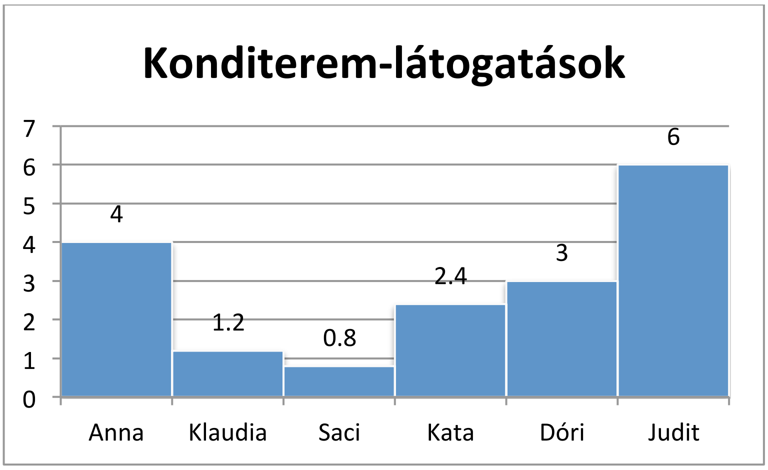
Saci **0,8 órát** tölt az edzőteremben egy héten. (1 pont)

b) $\bar{y}=2,9$ ezt felhasználva a szórás: (1 pont)

$$\sqrt{\frac{(4-2,9)^2+(1,2-2,9)^2+(0,8-2,9)^2+(2,4-2,9)^2+(3-2,9)^2+(6-2,9)^2}{6}}=\mathbf{1,75}$$

(3 pont)

A medián jelen esetben a két középső elem átlaga: $\frac{2,4+3}{2}=\mathbf{2,7}$ (2 pont)

c) 

(3 pont)

d) Az új átlag: $\frac{4+1,2+2,4+2,4+3+6}{6}=3,167$ (2 pont)

A kettő közötti különbség pedig: $3,167-2,9=\mathbf{0,27}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

6)

a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

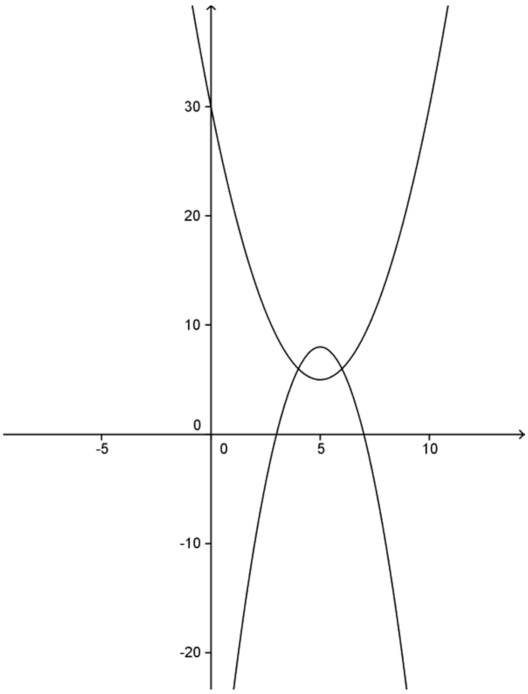
$f : y = x^2 - 10x + 30$

$g : y = -2x^2 + 20x - 42$ **(4 pont)**

b) Számítsa ki a két függvény által közbezárt területet! **(6 pont)**

c) Mekkora lesz annak az alakzatnak a térfogata, melyet az *g* függvény és az *x* tengely által közbezárt terület *x* tengely körüli forgatásával kapunk? Forgástest térfogatát a $\pi\int f^2(x)$ képlet segítségével kapjuk meg. **(6 pont)**

Megoldás:



a) (4 pont)

b) A konkáv parabola egyenletéből a másikat kivonva megkapjuk azt a függvényt melyet 4-6-ig integrálva a keresett területet kapjuk eredményül.

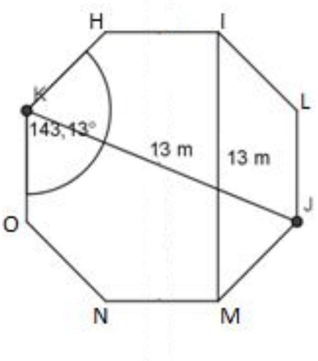
$$\int_4^6 -3x^2 + 30x - 72 = \left[-x^3 + 15x^2 - 72x\right]_4^6 = -216 + 540 - 432 - (-64 + 240 - 288) = \mathbf{4}$$ (6 pont)

c) A $\pi \cdot \int f^2(x)$ képletbe behelyettesítve és a Newton-Leibnitz formulát alkalmazva:

$$\left[\frac{4x^5}{5} - 20x^4 + \frac{568x^3}{3} - 840x^2 + 1764x\right]_3^7 = \frac{\mathbf{2048}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{\pi}$$ (6 pont)

Összesen: 16 pont

7) Az alábbi telek sarkaiban *J* és *K* pont. A köztük lévő legrövidebb út 13 méter. A kert középpontosan szimemtrikus a $\overline{JK}$ felezőpontjára. A kert szélessége szintén 13 méter, oldalai egész számú méterek. *K*-nál 143,13°-os szögben van a telek sarka.



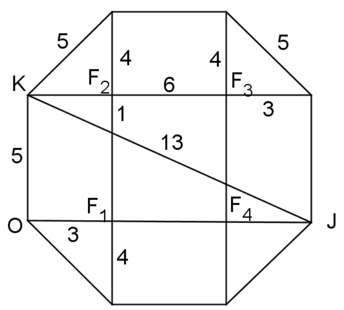
a) Mekkora a telek kerülete és területe? (8 pont)

b) A $\overline{KH}$, $\overline{IL}$, $\overline{JM}$, és $\overline{NO}$ oldalak derékszögű háromszög alakú területek átfogói. Ezekbe és az ismeretlen négy pont által bezárt területbe kék virágokat ültetünk. Mennyi pénzt kell költeniük, ha a kimaradt területekre fehér virágokat akarnak ültetni és egy zsák mag 12 345 Ft-ba kerül és 1 m^2-re elég? (5 pont)

c) Milyen magas lesz a kerítés, amivel a telket szeretnénk körbekeríteni, ha 63 m^2 alapanyag van hozzá? (3 pont)

Megoldás:

a) Behúzva a 2-2 hosszúság és szélesség jelölő segédvonalat keletkezik 4 db egybevágó derékszögű háromszög. Melynek szögei 53,13° illetve 36,87°-osak. A sinusokat kiszámolva $\frac{3}{5}$-öt és $\frac{4}{5}$-öt kapunk, amelyből $3x$, $4x$ és $5x$ a háromszög oldalai. Mivel a kert szélessége 13 méter, így x értéke minimum és maximum 1.



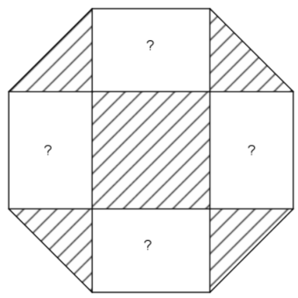
Ábra elkészítése: (4 pont)

Az $\overline{F_1F_2}$ így $13-8=5$. Az OKJ háromszögre felírva a Pithagorasz-tételt kijön, hogy $\overline{OJ}=12$ méter és $\overline{F_1F_4}=6$ méter. Így már ki tudjuk számítani a területet, amely:

$$T=(6\cdot 4)\cdot 2+(5\cdot 3)\cdot 2+\left(\frac{4\cdot 3}{2}\right)\cdot 4+6\cdot 5=\mathbf{132\ m^2} \quad \text{(2 pont)}$$

A kerület pedig: $5\cdot 6+6\cdot 2=$ **42 m** (2 pont)

b) A keresett területek összege: $(6\cdot 4)\cdot 2+(5\cdot 3)\cdot 2=78\,\text{m}^2$



(3 pont)

$78\cdot 12345=962910$

Tehát **962 910 Ft** kell a területekre. (2 pont)

c) $6\cdot x+6\cdot x+(5\cdot x)\cdot 6=63 \quad 42x=63\Rightarrow x=\frac{63}{42}$

1,5 m magas lesz a kerítés. (3 pont)

Összesen: 16 pont

8) Egy csúcsán álló négyzet alapú gúlába színültig víznek látszó folyadékot öntünk. A gúla alapjának köré írható körének sugara *R*. A gúlába beledobunk egy $\frac{R}{2}$ sugarú fémgolyót.

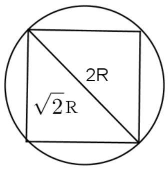
a) A víz mekkora része szorul ki, ha a magasság $M = R \cdot \pi$? (5 pont)

b) Ha a gúla oldaléle 10 méter, az alapjának oldala 2 méter, akkor milyen hosszú lesz az azonos térfogatú kúp alkotója? (6 pont)

c) Mekkora a gúla, és mekkora a kúp felszíne? (5 pont)

Megoldás:

a) A gúla térfogata: $\frac{2R^2\pi m}{3}$, a golyóé: $\frac{4\left(\frac{R}{2}\right)^2\pi}{3}$ (3 pont)

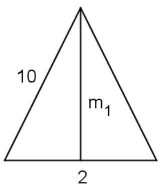


$m = R\pi$

gúla: $\frac{2R^3\pi}{3}$; golyó: $\frac{\frac{4}{8}R^3\pi}{3}$

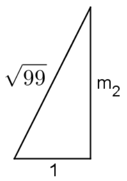
Tehát a víz $\mathbf{\frac{1}{4}}$-e folyik ki. (2 pont)

b) Ahol m_1 az oldallap magassága:



$m_1 = \sqrt{10^2 - 1^2} = \sqrt{99}$ (2 pont)

Ahol m_2 a gúla magassága:



$m_2 = \sqrt{\left(\sqrt{99}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{98}$ (2 pont)

$$V_{gúla} = \frac{4 \cdot \sqrt{98}}{3} = V_{kúp} = \frac{r^2\pi \cdot \sqrt{98}}{3}$$

$$r^2\pi = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$$

$$a^2 = \frac{4}{\pi} + 98 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = \sqrt{98 + \frac{4}{\pi}}}$$ (2 pont)

c) $A_{gúla} = 4 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{99}}{2} + 4 = 4 \cdot \left(\sqrt{99} + 1\right) \approx \mathbf{43{,}79}$ (2 pont)

$A_{kúp} = \pi r^2 + r\pi\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{4}{\pi}\pi + \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cdot \pi \cdot \sqrt{99 + \frac{4}{\pi}} \approx \mathbf{39{,}32}$ (3 pont)

Összesen: 16 pont

9) Niki néni és Levi bácsi takarítanak. Három féle tisztítószerük van. Egy 45%-os, egy 73%-os és egy 22%-os töménységű. A hígításhoz vizet használunk.

a) Mennyi vízzel kell hígítanunk őket külön-külön, ha 32%-os oldatot szeretnénk? (5 pont)

b) Niki néni és Levi bácsi úgy döntenek, hogy felhasználják a tisztítószereket. Niki néni dolgozik három órát, majd Levi bácsi egyet. Mennyit dolgozzanak együtt, ha külön-külön 6, illetve 8 óra alatt végeznek? (6 pont)

c) Levi bácsi nagyon elfáradt ezért segítsen neki megoldani a kisfia házi feladatát! „Ha egy kétjegyű számot elosztunk számjegyei összegével hányadosul 4-et, maradékul 9-et kapunk. Ha viszont e számot számjegyeinek szorzatával osztjuk el, akkor hányadosul 1-et, maradékul 15-öt kapunk." Melyik ez a szám? (5 pont)

Megoldás:

a) I. $0{,}73 \cdot x + 0 \cdot (1 - x) = 0{,}32 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0{,}32}{0{,}73} = 0{,}438 \quad \Rightarrow$ **0,562** víz kell

II. $0{,}45 \cdot x + 0 \cdot (1 - x) = 0{,}32 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0{,}32}{0{,}45} = 0{,}71 \quad \Rightarrow$ **0,28** víz kell

III. $0{,}22 \cdot x + 0 \cdot (1 - x) = 0{,}32 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0{,}32}{0{,}22} \quad \Rightarrow$ **nem lehet erősebbre hígítani** (5 pont)

b)

	1 óra alatt	3 óra alatt
Niki	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
Levi	$\frac{1}{8}$	

$\frac{3}{6} + \frac{1}{8} = \frac{12 + 3}{24} = \frac{15}{24}$ (2 pont)

A maradék $\frac{9}{24}$ munkát együtt csinálják meg. (2 pont)

Egy óra alatt $\frac{7}{24}$ munkát csinálnak meg együtt, tehát a munka $\frac{9}{24}$ részét **1 óra 17,14 perc** alatt végzik el. (2 pont)

c) $4(x + y) + 9 = 10x + y$

$xy + 15 = 10x + y$

$xy - y = 10x - 15 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10x - 15}{x - 1}$ (3 pont)

$4\left(x + \frac{10x - 15}{x - 1}\right) + 9 = 10x + \frac{10x - 15}{x - 1}$

Rendezve: $6x^2 - 45x + 54 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 6; x_2 = 1{,}5$, de mivel csak egész szám lehet megoldás, ezért: $\boldsymbol{x = 6}$, $\boldsymbol{y = 9}$. A keresett szám a **69**. (2 pont)

Összesen: 16 pont

Maximális elérhető pontszám: 64

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 115