ARITMETIKA ÉS ALGEBRA

I. TERMÉSZETES SZÁMOK

1. MŰVELETEK TERMÉSZETES SZÁMOKKAL

a) Összeadás: $a + b = c$ „ a” és „b”- összeadandók ,
„c”- összeg
A feladatokban „ annyival nagyobb (több) ”.

Az összeadás tulajdonságai: 1) kommutatív (felcserélhető): $a+b = b+a$
2) asszociatív (csoportosítható): $(a+b)+c = a+(b+c)$
3) „0”- semleges elem az összeadásra nézve: $0+a = a+0 = a$

b) Kivonás: $a - b = c$ „a”- kisebbítendő ,
„b”- kivonandó,
„c”- különbség
A feladatokban annyival kisebb (kevesebb).

c) Szorzás: $a \bullet b = c$ „a” és „b”- szorzótényezők,
„c”- szorzat
A feladatokban „ annyiszor nagyobb (több) ”.

A szorzás tulajdonságai: 1) kommutatív (felcserélhető) : $a\cdot b = b\cdot a$
2) asszociatív (csoportosítható) : $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b\cdot c$
3) „0 semleges elem az összeadásra nézve: $1\cdot a = a\cdot 1 = a$
4) a szorzás disztributív az összeadásra nézve :
$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ vagy $(a+b)\cdot c = a\cdot c+bc$

Közös tényező: $a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c)$ vagy $a\cdot c+b\cdot c = (a+b)\cdot c$

d) Osztás: $a : b = c$ „a”- osztandó
„b”- osztó
„c”- hányados
A feladatokban „ annyiszor kisebb (kevesebb) ”.

A maradékos osztás tétele: $a = b\cdot c + r$, $r < b$ (r maradék)

e) Hatványozás: $a^n = a\cdot a\cdots\cdots a$, (n-szer) „a”- alap,
„n”- hatványkitevő

Értelmezés: Egy természetes számot hatványozni azt jelenti, mint megszorozni önmagával, az alapot annyiszor véve, ahányszor a hatványkitevő mutatja.

Sajátos esetek: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^n = 1$, $0^n = 0$

Műveletek hatványokkal: $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$, $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$

Négyzetszámok és köbszámok:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744

Egy természetes szám felírása a 10 hatványainak segítségével:

$$\overline{abcdefgh} = a\cdot10^7 + b\cdot10^6 + c\cdot10^5 + d\cdot10^4 + e\cdot10^3 + f\cdot10^2 + g\cdot10 + h$$

2. EGYENLETEK

a) $x + a = b$, $x = b - a$

b) $a + x = b$, $x = b - a$

c) $x - a = b$, $x = b + a$

d) $a - x = b$, $x = a - b$

e) $a\,x = b$, $x = b : a$

f) $x\,a = b$, $x = b : a$

g) $a : x = b$, $x = a : b$

h) $x : a = b$, $x = b \cdot a$

3. A TERMÉSZETES SZÁMOK OSZTHATÓSÁGA

$a : b = c$	„a” a „c” többszöröse .	„b” a „c” osztója
	a b	„a” osztható „b” -vel
	b / a	„b” osztja „a”- t

Oszthatóság 10 - zel: Egy természetes szám osztható 10 - zel, ha utolsó számjegye 0.

Oszthatóság 10^n-nel: Egy természetes szám osztható 10^n -nel, ha utolsó n számjegye 0.

Oszthatóság 2 - vel : Egy természetes szám osztható 2 - vel, ha utolsó számjegye páros.

Oszthatóság 5 - tel : Egy természetes szám osztható 5- tel, ha utolsó számjegye 0 vagy 5.

Oszthatóság 3 - mal (9- cel): Egy természetes szám osztható 3 - mal (9- cel), ha számjegyeinek összege osztható 3- mal (9- cel).

Legnagyobb közös osztó (ln.k.o.) kiszámítása:
- a számokat törzstényezőkre bontjuk,
- a közös tényezőket a legkisebb hatványon összeszorozzuk.

Legkisebb közös többszörös (lk.k.t.) kiszámítása:
- a számokat törzstényezőkre bontjuk,
- minden tényezőt egyszer véve a legnagyobb hatványon összeszorzunk.

4. HALMAZOK

Jelölések : $\in$ - eleme $\notin$ - nem eleme

$\subset$ - bennfoglalva $\not\subset$ - nincs bennfoglalva

$\supset$ - bennfoglalja, $\not\supset$ - nem foglalja be

$\subseteq$ -bennfoglalva vagy egyenlő

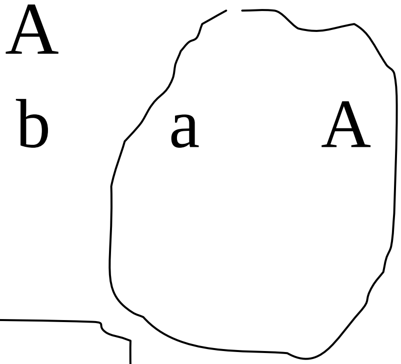
$\supseteq$ - bennfoglalja vagy egyenlő

$\not\subseteq$ -nincs bennfoglalva és nem egyenlő

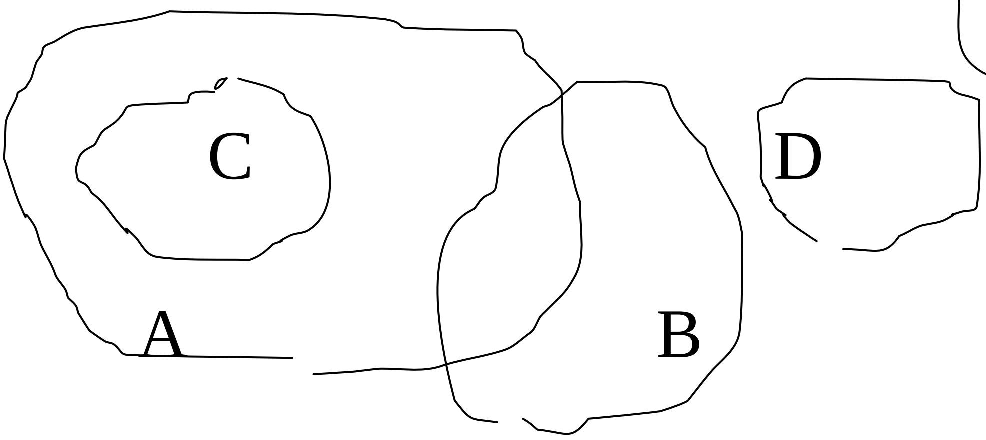
$\not\supseteq$ -nem foglalja be és nem egyenlő

$-$ vagy $\backslash$ - mínusz

Relációk: a) Hozzátartozás $a \in A$; $b \notin A$



b) Bennfoglalás

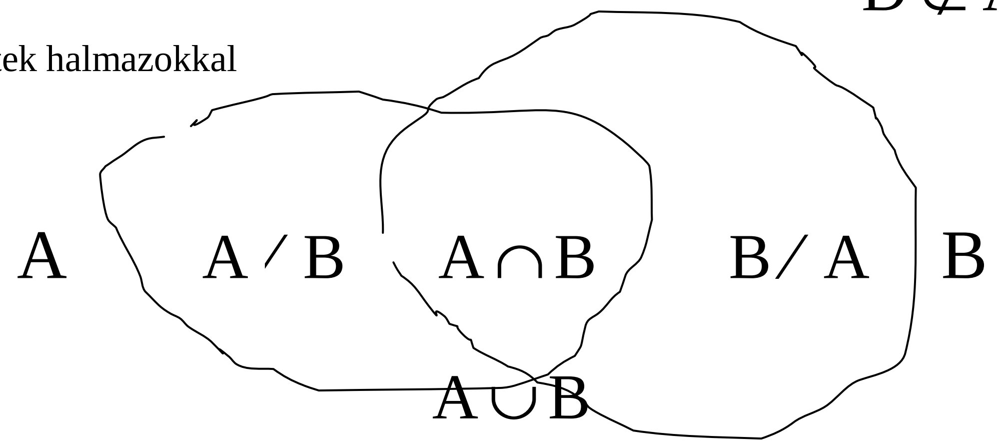


$C \subset A$

$B \not\subset A$

$D \not\subset A$

Műveletek halmazokkal



a) Egyesítés: $A \cup B$ - a két halmaz összes elemeinek halmaza.

b) Metszet: $A \cap B$ - a két halmaz közös elemeinek halmaza.

c) Különbség: A / B - az A halmaz azon elemeinek halmaza,

amelyek nem tartoznak a B halmazhoz.

d) Descartes szorzat: Ha $A = \{ a ; b \}$, $B = \{ x ; y ; z \}$,

$A \times B = \{ (a;x) , (a,y) , (a;z) , (b,x) , (b;y) , (b,z) \}$,

$B \times A = \{ (x;a) , (y,a) , (z;a) , (x,b) , (y;b) , (z,b) \}$.

Az A és B halmazok Descartes szorzatának nevezzük az összes elempárok halmazát, ahol az első elem az A halmazból, a második elem a B halmazból van.

II. EGÉSZ SZÁMOK

1. AZ EGÉSZ SZÁMOK HALMAZA. SZÁMHALMAZOK. SZÁMTENGELY. ELLENTÉTES SZÁMOK.. MODULUSZ. RENDEZÉS.

a) Értelmezés : Egész számnak nevezzük a 0-tól különböző természetes számot, amelynek + vagy - előjele van.

b) Jelölések :
$\mathbb{N}$ - a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$ - az egész számok halmaza
$\mathbb{N}^*$ - a 0-tól különböző természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}^*$ - a 0-tól különböző egész számok halmaza
$\mathbb{Z}_-$ - a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Z}_+$ - a pozitív egész számok halmaza
$>$ - nagyobb
$<$ - kisebb
$\geq$ - nagyobb vagy egyenlő
$\leq$ - kisebb vagy egyenlő

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{Q}$ - a racionális számok halmaza

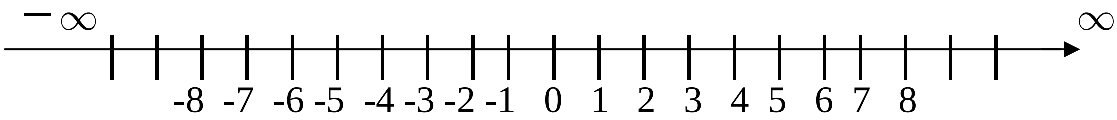
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ ahol } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$\mathbb{R}$ - a valós számok halmaza

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

ahol $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az irracionális számok halmaza.

c)Számtengely:



0 - a számtengely kezdőpontja.
A nyíl a növekedési irányt jelöli.: A 0-tól különböző egész szám ellentétesének (ellentettjének) nevezzük azt az egész számot, amelyet úgy kapunk, hogy megváltoztatjuk a szám előjelét. A számtengelyen az ellentett számoknak megfelelő pontok a kezdőponttól egyenlő távolságra helyezkednek el.

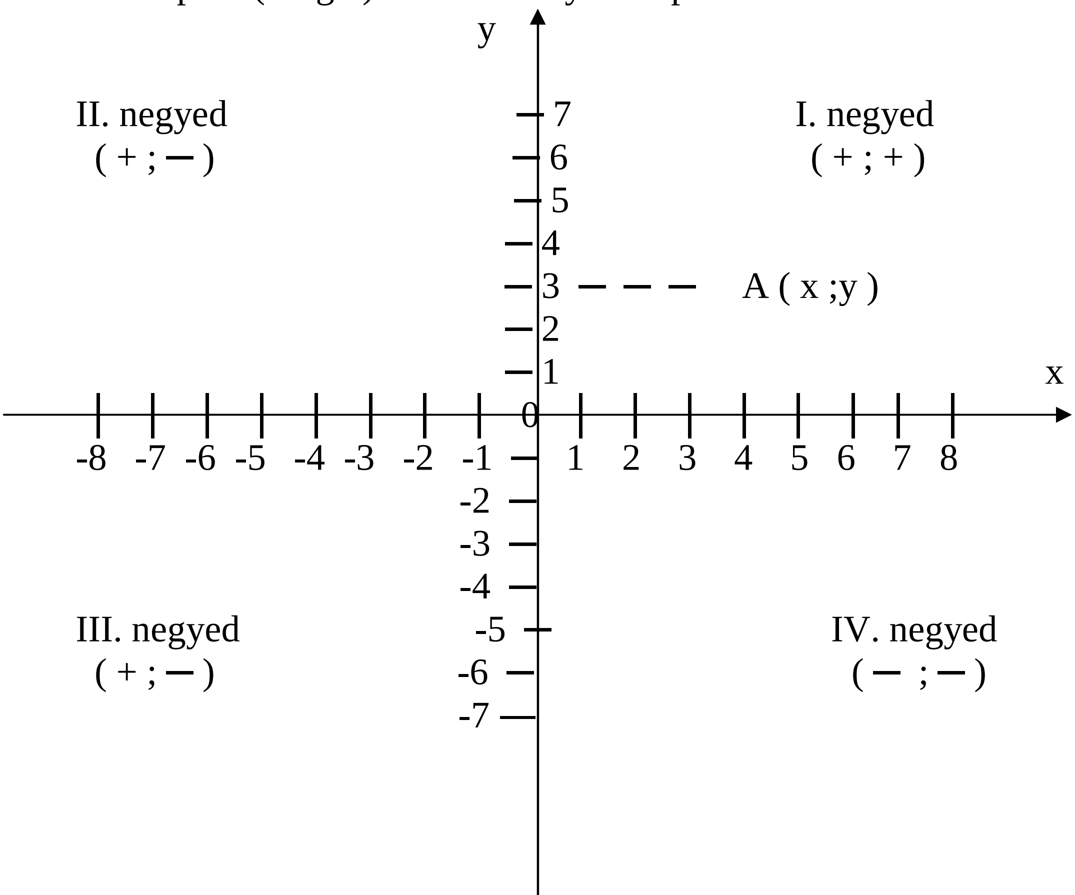
e) Modulusz (abszolút érték):
$$|z| = \begin{cases} z\,, & \text{ha } z > 0 \\ 0\,, & \text{ha } z = 0 \\ -z\,, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$$

Mértanilag $|z|$ a „z” számnak megfelelő pontnak a számtengely kezdőpontjától való távolságát jelenti. Más szóval egy egész szám modulusza (abszolút értéke) az illető szám előjel nélkül.

2. DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA RENDSZER

Két egymásra merőleges számtengely koordináta rendszert alkot.

Ox - abszcissza tengely	x - az A pont abszcisszája
Oy - ordináta tengely	y - az A pont ordinátája
O - kezdőpont (origo)	x és y az A pont koordinátái



3. MŰVELETEK EGÉSZ SZÁMOKKAL

a) Összevonás: - Azonos előjelű számokat úgy vonunk össze, hogy az abszolút értékeket összeadjuk, az összeg előjele pedig a közös előjel lesz.

- Különböző előjelű számokat úgy vonunk össze, hogy az abszolút értékben nagyobb számból kivonjuk az abszolút értékben kisebb számot, az összeg előjele pedig az abszolút értékben nagyobb számé lesz.

- A zárójel előtti mínusz megváltoztatja a zárójelben levő előjeleket.

b) Szorzás és osztás: - Előjel szabály: $(+)\cdot(+) = +$

$(+)\cdot(-) = -$

$(-)\cdot(+) = -$

$(-)\cdot(-) = +$

Más szóval azonos előjelű számok szorzata (hányadosa) pozitív, különböző előjelű számok szorzata (hányadosa) negatív.
Megállapítjuk a szorzat (hányados) előjelét a fenti előjel szabály szerint, az abszolút értékeket pedig összeszorozzuk (elosztjuk).

c) Egész szám természetes kitevőjű hatványa: - Pozitív szám bármilyen hatványa pozitív.

- Negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív, páratlan kitevőjű hatványa negatív.

Megállapítjuk a hatvány előjelét, az abszolút értékeket pedig hatványra emeljük.

III. RACIONÁLIS SZÁMOK

1. KÖZÖNSÉGES TÖRTEK

$\frac{a}{b}$ - a tört általános alakja a - számláló

b - nevező

A törtek osztályozása : a) valódi tört $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$

b) egységtört $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$

c) áltört $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$

2. EKVIVALENS (EGYENÉRTÉKŰ) TÖRTEK

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

3.TÖRTEK EGYSZERŰSÍTÉSE

Egy törtet egyszerűsíteni azt jelenti, hogy elosztjuk a tört számlálóját is és nevezőjét is ugyan- azzal a 0-tól és 1-től különböző természetes számmal.

4. TÖRTEK BŐVÍTÉSE

Egy törtet bővíteni azt jelenti, hogy megszorozzuk a tört számlálóját is és nevezőjét is ugyanazzal a 0-tól és 1-től különböző természetes számmal.

5. TÖRTEK KÖZÖS NEVEZŐRE HOZÁSA

Több tört közös nevezője a nevezők legkisebb közös többszöröse.

a) kiszámítsuk a nevezők lk.k.t.-ét , ez lesz a közös nevező;
b) rendre végigosztjuk a közös nevezőt a régi nevezőkkel;
c) a kapott hányadosokkal bővítjük a törteket.

6. TÖRTEK ÖSSZEVONÁSA

Csak közös nevezőjű törteket vonhatunk össze a következőképpen: a nevező változatlan marad és a számlálókat összevonjuk. Ha a törtek különböző előjelűek összevonás előtt közös nevezőre hozzuk őket.

7. TÖRTEK SZORZÁSA

Több törtet úgy szorzunk össze, hogy a számlálókat össze szorozzuk egymás közt és a nevezőket is egymás közt Szorzás előtt, ha lehet egyszerűsítünk..

8.TÖRTEK OSZTÁSA

Két törtet úgy osztunk el egymással, hogy az első törtet megszorozzuk a második tört inverzével.

9. TÖRTEK HATVÁNYA

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Negatív kitevőjű hatvány azt jelenti, hogy az illető tört inverzét emeljük az illető hatványra:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

10. RACIONÁLIS SZÁM

Racionális számnak nevezzük az $\frac{a}{b}$ törttel egyenértékű törtek halmazát.

Kifejezési formák : - közönséges tört
- vegyes szám - 2 rész : egész rész
  tört rész.
- tizedes tört : - véges
  - végtelen, szakaszos : - tiszta szakaszos
    - vegyes szakaszos

11. AZ EGÉSZ KIEMELÉSE A TÖRTBŐL

A számlálót elosztjuk a nevezővel, a hányados lesz az egész rész, a maradék az új számláló, a nevező változatlan marad.

12. AZ EGÉSZ BEVEZETÉSE A TÖRTBE

Az egészet megszorozzuk a nevezővel, a szorzathoz hozzáadjuk a számlálót, ez lesz az új számláló, a nevező változatlan marad.

13. KÖZÖNSÉGES TÖRTEK ÁTALAKÍTÁSA TIZEDES TÖRTTÉ

A számlálót elosztjuk a nevezővel. A hányados lehet véges tizedes tört, tiszta szakaszos tizedes tört vagy vegyes szakaszos tizedes tört.

14. TIZEDES SZÁM (VÉGES TIZEDES TÖRT) ÁTALAKÍTÁSA KÖZÖNSÉGES TÖRTTÉ

A számlálóba írjuk a számot tizedes vessző nélkül, a nevezőbe az 1-es után annyi 0-át írunk, ahány számjegy van a tizedes részben. Végül, ha lehet egyszerűsítünk .

15. TISZTA SZAKASZOS TIZEDES TÖRT ÁTALAKÍTÁSA KÖZÖNSÉGES TÖRTTÉ

Az egészet a tört elé írjuk, a számlálóba írjuk a szakaszt, a nevezőbe annyi 9-est írunk, ahány számjegy van a szakaszban. Végül, ha lehet egyszerűsítünk és bevezetjük az egészet a törtbe.

16. VEGYES SZAKASZOS TIZEDES TÖRT ÁTALAKÍTÁSA KÖZÖNSÉGES TÖRTTÉ

Az egészet a tört elé írjuk, a számlálóban a tizedes részből kivonjuk a szakasz előtti részt, a nevezőbe annyi 9-est írunk, ahány számjegy van a szakaszban és annyi 0 - át, ahány számjegy van a szakasz előtt Elvégezzük a számlálóban a kivonást, ha lehet egyszerűsítünk és bevezetjük az egészet a törtbe.

17. TIZEDES SZÁMOK ÖSSZEVONÁSA

A számokat egymás alá írva vonjuk össze, vigyázva arra, hogy az egész rész az egész rész alá, a tizedes rész a tizedes rész alá és a tizedes vessző a tizedes vessző alá kerüljön.

18. TIZEDES SZÁMOK SZORZÁSA

a) Tizedes számot úgy szorzuk a 10 hatványaival, hogy a a tizedes vesszőt annyi szám-jeggyel visszük balról jobbra, amennyi a 10 hatványkitevője.
b)Tizedes számot tizedes számmal úgy szorzunk, hogy a számokat összeszorozzuk tizedes vessző nélkül, a szorzatban pedig a tizedes veszőt annyi számjegy elé tesszük, jobbról balra számolva, ahány számjegy van a szorzótényezők tizedes részében összesen.

19. TIZEDES SZÁMOK OSZTÁSA

a) Tizedes számot úgy osztunk a10 hatványaival, hogy a tizedes vesszőt annyi számjegy- gyel visszük jobbról balra, amennyi a 10 hatvány-kitevője.
b) Tizedes számot természetes számmal úgy osztunk, hogy mielőtt a maradékba lehozzuk a tizedes vessző utáni első számjegyet, a hányados végére kitesszük a tizedes vesszőt.
c) Tizedes számot tizedes számmal nem lehet osztani, csak tizedes számot természetes számmal. Ha az osztó tizedes szám, úgy az osztandóban, mint az osztóban a tizedes vesszőt annyi számjeggyel visszük balról jobbra, ahány számjegy van az osztó tizedes részében.

IV. ARÁNYOK, ARÁNYPÁROK, SZÁZALÉKOK, ARÁNYOS MENNYISÉGEK

ARÁNYOK

a) Arány: Két „a” és „b” ($b \neq 0$) szám aránya az a:b hányados és $\frac{a}{b}$-vel jelöljük.

b) Valószínűség: Egy „a” esemény megvalósulásának valószínűsége az esemény meg-valósulásának kedvező esetek száma és a kísérletben lehetséges esetek számának aránya.

$$P_{(A)} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{lehetséges esetek száma}}$$

c) Ötvözet finomsága: Ötvözet finomságának nevezzük az ötvözetben levő nemesfém és az ötvözet tömegének arányát.

$$T = \frac{m}{M}$$

d) Oldat koncentrációja (töménysége): Egy oldat koncentrációjának nevezzük a feloldott anyag és az oldat tömegének arányát.

$$\text{Koncentráció} = \frac{\text{feloldott anyag tömege}}{\text{oldat tömege}}$$

d) Egy rajz (térkép) léptéke: Egy rajz (térkép) léptékének nevezzük a rajzon mért távolság és a terepen (valóságban) mért távolság arányát.

$$L = \frac{\text{távolság a rajzon}}{\text{távolság a valóságban}}$$

2. SZÁZALÉKOK

Százalékos aránynak nevezzük a $\frac{p}{100}$ ($p \in$ □ ; $p \geq 0$) alakú arányt. Jelölése : p%

Egy „a” szám p% -át úgy számítsuk ki, hogy a számot megszorozzuk $\frac{p}{100}$ - zal, vagyis

$$x = \quad x = \frac{\cdot}{100}$$

Ha egy ismeretlen x szám p% - a „b”, vagyis $\frac{p}{100} \cdot x = b$, akkor $x = \frac{b \cdot 100}{p}$

Ha „b” az „a” szám x %-a , akkor $x = \frac{b \cdot 100}{a}$

3. ARÁNYPÁROK

a) Értelmezés: Két arány egyenlőségét aránypárnak nevezzük.

Jelölés $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Az aránypár elemei: „a” és „d” - kültagok

„b” és „c” - beltagok

b) Az aránypár alaptulajdonsága: Bármely aránypárban a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával. $a \cdot d = b \cdot c$

c) Az aránypár ismeretlen tagjának kiszámítása:

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d} \qquad \frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

10

d) Származtatott aránypárok:

- Azonos tagú származtatott aránypárok: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

felcseréljük a beltagokat $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, felcseréljük a kültagokat $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, felcseréljük a beltagokat is és a kültagokat is $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ vagy $\left(\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\right)$

(megfordítjuk az arányokat) .

-Megváltoztatott tagú származtatott aránypárok:

- Egy aránypárban összeadva (kivonva) a számlálókat és a nevezőket, az eredeti arányokkal egyenlő arányt kapunk. $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$
- Egy aránypárban hozzáadva (kivonva) a számlálókat a nevezőkhöz (nevezőkből) újabb aránypárt kapunk (vagy fordítva, ha a nevezőket adjuk hozzá vagy vonjuk ki a számlálókból).

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},\quad \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d},\quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}.$$

Más kombinációk

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d},\quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d},\quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d},\quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a+c}{b+d},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},\quad \frac{c+d}{c-d}=\frac{a+b}{a-b},\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d},\quad \frac{c-d}{c+d}=\frac{a-b}{a+b},$$

$$\frac{an}{bn}=\frac{c}{d},\quad \frac{a}{b}=\frac{cm}{dm},\quad \frac{an}{b}=\frac{cn}{d},\quad \frac{a}{bm}=\frac{c}{dm},$$

$$\frac{an}{bn}=\frac{cm}{dm},\quad \frac{an}{bm}=\frac{cn}{dm},\quad \frac{a}{b}=\frac{an+cn}{bn+dn},\quad \frac{a}{b}=\frac{an-cn}{bn-dn},$$

$$\frac{an+cn}{bn+dn}=\frac{c}{d},\quad \frac{an-cn}{bn-dn}=\frac{c}{d},\quad \frac{an+cn}{bn+dn}=\frac{an-cn}{bn-dn},\quad \frac{an-cn}{bn-dn}=\frac{an+cn}{bn+dn},$$

$$\frac{an+bn}{an-bn}=\frac{cn+dn}{cn-dn},\quad \frac{an+bn}{an-bn}=\frac{cn+dn}{cn-dn},\quad \frac{an+cm}{bn+dm}=\frac{an-cm}{bn-dm},$$

$$\frac{an-cm}{bn-dm}=\frac{an+cm}{bn+dm},\quad \frac{an+bm}{an-bm}=\frac{cn+dm}{cn-dm},\quad \frac{an-bm}{an+bm}=\frac{cn-dm}{cn+dm}.$$

4. ARÁNYSOR

a) <u>Értelmezés:</u> $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\ldots..=\frac{x_n}{a_n}$ egy aránysor.

b) Az aránysor alaptulajdonsága: Egy aránysorban minden arány egyenlő a számlálók összegének és a nevezők összegének az arányával, vagyis

$$\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\ldots\ldots=\frac{x_n}{a_n}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n}{a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n}$$

más variánsok:

$$\frac{k_1x_1}{k_1a_1}=\frac{k_2x_2}{k_2a_2}=\frac{k_3x_3}{k_3a_3}=\ldots\ldots\ldots=\frac{k_nx_n}{k_na_n}=\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+\ldots\ldots+k_nx_n}{k_1a_1+k_2x_2+k_3a_3+\ldots\ldots+k_na_n}$$

$$\frac{k_1x_1}{k_2a_1}=\frac{k_1x_2}{k_2a_2}=\frac{k_1x_3}{k_2a_3}=\ldots\ldots=\frac{k_1x_n}{k_2a_n}=\frac{k_1x_1+k_1x_2+k_1x_3+\ldots\ldots+k_1x_n}{k_2a_1+k_2x_2+k_2a_3+\ldots\ldots+k_2a_n}$$

6. ARÁNYOS MENNYISÉGEK

a) Egyenesen arányos mennyiségek: Két x és y mennyiség egyenesen arányos, ha úgy függnek egymástól, hogy amikor az egyik bizonyos számszor nő (csökken), a másik ugyanannyiszor nő (csökken), vagyis $y = kx$, $(k\neq 0)$.
Az $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n\}$ halmazok elemei között egyenes arányosság áll fenn, ha elemeikből egyenlő aránysort alkothatunk, vagyis

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots\ldots\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

b) Fordítottan arányos mennyiségek: Két x és y mennyiség fordítottan arányos, ha úgy függnek egymástól, hogy amikor az egyik bizonyos számszor nő (csökken), a másik ugyanannyiszor csökken (nő), vagyis $y = \dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$.
Az $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n\}$ halmazok elemei között fordított arányosság áll fenn, ha elemeiből egyenlő szorzatsort alkothatunk , vagyis

$$a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = \ldots\ldots\ldots = a_nb_n$$

c) Egyszerű hármasszabály: - egyenesen arányos mennyiségekkel

e — e

$\uparrow$ a……………b $\uparrow$ vagy $\downarrow$ a……………b $\downarrow$

c……………x — c……………x

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{bc}{a} \qquad\qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{bc}{a}$$

-fordítottan arányos mennyiségekkel

$$\uparrow\begin{array}{l} a \xrightarrow{f} \ldots\ldots\ldots\ldots b \\ c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \end{array}\downarrow \qquad \text{vagy} \qquad \downarrow\begin{array}{l} a \xrightarrow{f} \ldots\ldots\ldots\ldots b \\ c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \end{array}\uparrow$$

$$\frac{a}{c}=\frac{x}{b}\ \Rightarrow\ x=\frac{ab}{c} \qquad\qquad \frac{a}{c}=\frac{x}{b}\ \Rightarrow\ x=\frac{ab}{c}$$

7. KÖZÉPÉRTÉKEK

a) Számtani közép:

$$m_n=\frac{a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n}{n},\quad n\in\mathbb{N} \qquad (a_1,a_2,\ldots\ldots a_n\in\mathbb{R})$$

b) Mértani közép: $m_g=\sqrt{a\cdot b},\quad a,b\in\mathbb{R}_+$

c) Súlyozott számtani közép: $m_S=\dfrac{m_1a_1+m_2a_2+\ldots\ldots+m_na_n}{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n},\quad n\in\mathbb{N}$

$(a_1, a_2,\ldots a_n\in\mathbb{R})$, $(m_1, m_2,\ldots m_n\in\mathbb{R}_+)$ ahol az $m_1, m_2,\ldots m_n$ az $a_1, a_2,\ldots a_n$ számok előfordulási gyakorisága (súlyok).

d) Harmonikus közép:

$$m_h=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{a_n}},\quad n\in\mathbb{N}, \quad (a_1, a_2\ldots\ldots a_n\in\mathbb{R})$$

két szám esetén

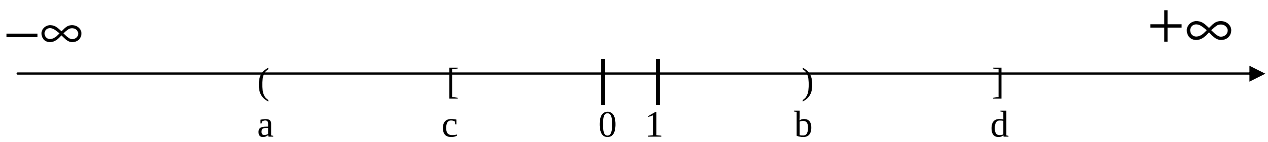
$$m_h=\frac{2ab}{a+b},\ (a,b\in\mathbb{R})$$

V. VALÓS SZÁMOK

1. VALÓS SZÁM

Valós számok halmazának jelölése ℝ
Valós szám lehet racionális szám a € ℚ , vagy irracionális szám b € ℝ \ ℚ

2. INTERVALLUMOK



a) nyílt intervallum: (a;b) $a \notin (a;b)$ és $b \notin (a;b)$

b) zárt intervallum: [c;d] $c \in [c;d]$ és $d \in [c;d]$

c) félig zárt (nyílt) intervallum: (a;d] $a \notin (a;d]$ és $d \in (a;d]$

[c;b) $c \in [c;b)$ és $b \notin [c;b)$

3. EGYENLŐTLENSÉGEK

a) $ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

b) $ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$

c) $ax + b \le 0 \Rightarrow ax \le -b \Rightarrow x \le -\frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$

d) $ax + b \ge 0 \Rightarrow ax \ge -b \Rightarrow x \ge -\frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$

4. EGYENLŐTLENSÉG RENDSZEREK

a) $\begin{cases} ax + b < 0 \\ cx + d < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{b}{a} \\ x < -\dfrac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right) \\ x \in \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right) \cap \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$

b) $\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \\ x > -\dfrac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\dfrac{b}{a}; \infty\right) \\ x \in \left(-\dfrac{d}{c}; \infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{b}{a}; \infty\right) \cap \left(-\dfrac{d}{c}; \infty\right)$

c) $\begin{cases} ax + b \le 0 \\ cx + d \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{b}{a} \\ x \le -\dfrac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right] \\ x \in \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right] \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right] \cap \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right]$

d) $\begin{cases} ax + b \ge 0 \\ cx + d \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{b}{a} \\ x \ge -\dfrac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left[-\dfrac{b}{a}; \infty\right) \\ x \in \left[-\dfrac{d}{c}; \infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{b}{a}; \infty\right) \cap \left[-\dfrac{d}{c}; \infty\right)$

5. EGYENLETEK

a) $x + a = b$ $x = b - a$	b) $a + x = b$ $x = b - a$	c) $x - a = b$ $x = b + a$	d) $a - x = b$ $x = a - b$
e) $a\,x = b$ $x = \dfrac{b}{a}$	f) $x\,a = b$ $x = \dfrac{b}{a}$	g) $a : x = b$ $x = \dfrac{a}{b}$	h) $x : a = b$ $x = b \cdot a$

6. TELJES NÉGYZET GYÖKE , GYÖK NÉGYZETE

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$ A négyzet és gyökjel kölcsönösen semlegesíti egymást.

Tényező kiemelése gyökjel alól : $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

7. MŰVELETEK GYÖKMENNYISÉGEKKEL

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} + c\sqrt{x} = (a+b+c)\sqrt{x}$$

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} + c\sqrt{y} + d\sqrt{y} = (a+b)\sqrt{x} + (c+d)\sqrt{y}$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{xy} \qquad a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{y} = ab\sqrt{xy}$$

$$a\sqrt{x}\left(b\sqrt{y} + c\sqrt{z}\right) = ab\sqrt{xy} + ac\sqrt{xz} \quad \text{vagy} \quad \left(a\sqrt{x} + b\sqrt{y}\right)c\sqrt{z} = ac\sqrt{xz} + bc\sqrt{yz}$$

$$\left(a\sqrt{x} + b\sqrt{y}\right)\left(c\sqrt{z} + d\sqrt{u}\right) = ac\sqrt{xz} + ad\sqrt{xu} + bc\sqrt{yz} + bd\sqrt{yu} \quad \text{vagy}$$

$$\left(a\sqrt{x} + b\sqrt{y}\right)\left(c\sqrt{z} + d\sqrt{u}\right) = ac\sqrt{xz} + bc\sqrt{yz} + ad\sqrt{xu} + bd\sqrt{yu}$$

$$\left(a\sqrt{x} + b\sqrt{y}\right) : c\sqrt{z} = a:c\sqrt{x:z} + b:c\sqrt{y:z}$$

7. MŰVELETEK BETŰKKEL JELÖLT VALÓS SZÁMOKKAL

a) Műveletek :

$ax+bx+cx = (a+b+c)x$

$ax+by+cz+mx+ny+pz = (a+m)x+(b+n)y+(c+p)z$

$ax \cdot by = (ab)xy$

$ax\,(by+cz) = abxy+acx$

$(ax+by)\,(cz+du) = acxz+adxu+bcyz+bdyu$

$(ax+by)cz = axcz+bycz$

$(x+by)\,(cz+du) = acxz+bcyz+adxu+bdyu$

b) Rövidített számolási képletek:

$A\,(B+C) = AB+AC$ vagy $(A+B)\,C = AC+BC$

$(A+B)\,(C+D) = AC+AD+BC+BD$ vagy $(A+B)\,(C+D) = AC+BC+AD+BD$

$(A+B)\,(A-B) = A^2-B^2$ vagy $(A-B)\,(A+B) = A^2-B^2$

$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$

$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$

$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$(A-B)^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

$(A+B)\,(A^2-AB+B^2) = A^3+B^3$

$(A-B)\,(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$

c) Közös tényező: $AB+AC = A\,(B+C)$ vagy $AB+AC = (B+C)A$

$AC+BC = (A+B)C$ vagy $AC+BC = C\,(A+B)$

d) Felbontási képletek: $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ vagy $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ és $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$

$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2$

$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$

$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

e) A nevező gyöktelenítése: $\dfrac{a}{\sqrt{x}} = \dfrac{a\sqrt{x}}{x}$ $\dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}} = \dfrac{a\sqrt{xy}}{by}$

$$\frac{a}{b\sqrt{x} + c\sqrt{y}} = \frac{a\left(b\sqrt{x} - c\sqrt{y}\right)}{b^2x - c^2y} \qquad \frac{a}{b\sqrt{x} - c\sqrt{y}} = \frac{a\left(b\sqrt{x} + c\sqrt{y}\right)}{b^2x - c^2y}$$

$$\frac{A}{B+C} = \frac{A(B-C)}{B^2 - C^2} \qquad \frac{A}{B-C} = \frac{A(B+C)}{B^2 - C^2}$$

VI. RACIONÁLIS TÖRTEK

1.ÉRTELMEZÉS

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

Értelmezési tartomány: $x \in R \setminus \{$az x azon értékei amelyekre $Q(x) = 0\}$

A tört értelmezett az x azon értékeire amelyekre $Q(x) \neq 0$.

A tört értelmetlen az x azon értékeire amelyekre $Q(x) = 0$.

1. A TÖRT SZÁMÉRTÉKE

$$F(a) = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

2. TÖRTEK EGYSZERŰSÍTÉSE ÉS BŐVÍTÉSE

Ugyanazok a szabályok, mint a racionális számoknál.

2. MŰVELETEK RACIONÁLIS TÖRTEKKEL

Ugyanazok a szabályok, mint a racionális számoknál.

VII. FÜGGVÉNYEK

1.ÉRTELMEZÉS

Adott az A és B halmaz, melynek elemei x€A és y€B. Ha valamilyen összefüggés segítségével az A halmaz minden x elemének megfeleltetünk egyetlen y elemet a B halmazból, akkor egy f függvényt képeztünk az A halmazon, amelynek elemei a B halmazban vannak. $f: A \Rightarrow B$

A - értelmezési tartomány
B - érték tartomány (értékkészlet)
f - függvény

3. LINEÁRIS FÜGGVÉNY

a) Értelmezés: $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, egy lineáris függvény.
f függvény értelmezve a valós számok halmazán, melynek értékei valós számok, ahol $f(x) = ax + b$, a és b valós számok.

b) Értéktáblázat:

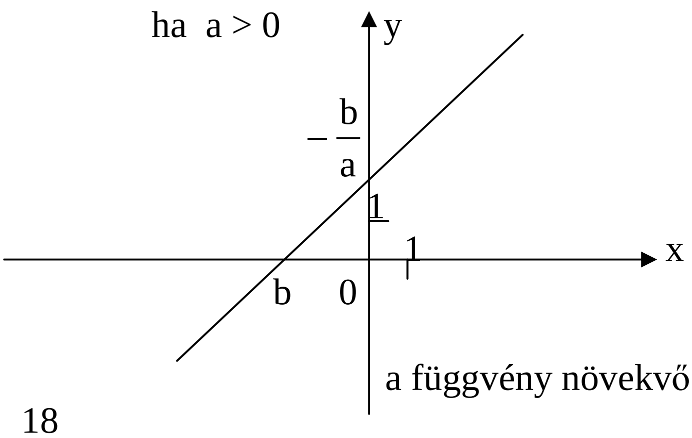
x	$-\infty$	k_1	k_2	0	k_3	k_4	$+\infty$
f(x)		$f(k_1)$	$f(k_2)$	b	$f(k_3)$	$f(k_4)$	

c) A függvény grafikusképének a koordináta rendszer tengelyeivel való metszéspontjai: ha $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, ha $x = 0 \Rightarrow f(0) = b$

A függvény grafikus képe az Ox tengelyt a (0 ; b) pontban,
az Oy tengelyt a $(-\frac{b}{a}, 0)$ pontban metszi.

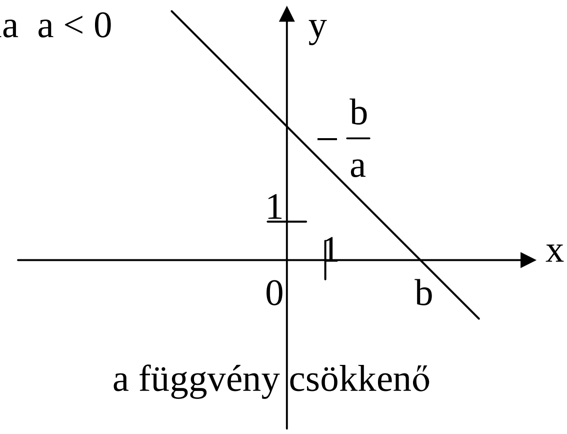
d) A függvény grafikus képe:

ha $a > 0$



a függvény növekvő

ha $a < 0$



a függvény csökkenő

VIII. MÁSODFOKÚ EGYENLETEK

1. ÁLTALÁNOS ALAK

$ax^2 + bx + c = 0,\quad a \neq 0,\ a,b,c \in \mathbb{R},\quad x \in \mathbb{R}$.

2. DISZKRIMINÁNS

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

3. MEGOLDÁSI KÉPLET

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ha $\Delta < 0 \Rightarrow M = \varnothing$ ha $\Delta = 0 \Rightarrow M = \{x_1 = x_2\}$

ha $\Delta > 0 \Rightarrow M = \{x_1; x_2\}$ $(x_1 \neq x_2)$

4. TÉNYEZŐKRE BONTÁSI KÉPLET

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökei.