Valószínűségszámítás

http://mobidiak.inf.unideb.hu/~papgy/esemeny.pdf

Fóliák:

http://mobidiak.inf.unideb.hu

Pap Gyula

DE Informatikai Intézet

papgy@inf.unideb.hu

1. Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Valószínűsége véletlen eseményeknek van

Véletlen esemény:

- nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkezik-e, vagy sem

- véletlen jelenségekkel, véletlen kimenetelű kísérletekkel kapcsolatosak

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztanak m darabot ($m \leqslant n$), és megszámolják, hogy hány selejtes van; lehetséges kimenetelek: az $\Omega := \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ halmaz elemei

- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámoljuk, hogy hány találatunk van; lehetséges kimenetelek: az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei

- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások

Elemi események: a kísérlet lehetséges kimenetelei

Eseménytér: az elemi események halmaza; jelölés: Ω

Esemény: az eseménytér részhalmazai; jelölés: $A \subset \Omega$

Ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következett be, és $\omega \in A$, akkor az A esemény bekövetkezett, ha pedig $\omega \notin A$, akkor az A esemény nem következett be

Biztos esemény: amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az Ω halmazzal

Lehetetlen esemény: amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset$ üres halmazzal

Logikai műveletek eseményekkel:

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét:** pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\overline{A}$

- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A + B$ vagy $A \cup B$

- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$

- Az A és B események **különbsége** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$

- Az A és B események **szimmetrikus differenciája** az az esemény, amely akkor következik be, amikor az A és B események közül pontosan egy következik be; jelölése: $A \triangle B$

- Azt mondjuk, hogy az A és B események **kizárják egymást (diszjunktak)**, ha egyszerre nem következhetnek be

- Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$

Érvényesek a következő összefüggések:

- kommutativitás: $A + B = B + A$,

  $$A \cdot B = B \cdot A$$

- asszociativitás: $A+(B+C) = (A+B)+C$,

  $$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- idempotencia: $A + A = A$, $A \cdot A = A$

- disztributivitás: $A\cdot(B+C) = (A\cdot B)+(A\cdot C)$,

  $$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

- de Morgan-féle azonosságok:

  $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

- $A - B = A \cdot \overline{B}$

- $A \triangle B = (A - B) + (B - A)$

- A és B kizárják egymást akkor és csak akkor, ha $A \cdot B = \emptyset$

- $A \Rightarrow B$ akkor és csak akkor, ha $A \cdot B = A$,

  illetve akkor és csak akkor, ha $A + B = B$,

  illetve akkor és csak akkor, ha $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

- $\overline{\overline{A}} = A$, $\quad \overline{\Omega} = \emptyset$, $\quad \overline{\emptyset} = \Omega$, $\quad \overline{A} = \Omega - A$

- $A + \overline{A} = \Omega$, $\quad A \cdot \overline{A} = \emptyset$, $\quad A + \emptyset = A$,

  $A + \Omega = \Omega$, $\quad A \cdot \emptyset = \emptyset$, $\quad A \cdot \Omega = A$

Eseményalgebra: események olyan $\mathcal{A}$ halmaza, mely tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és az unióképzésre

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$ rendszere

σ-**algebra:** olyan eseményalgebra, mely zárt a megszámlálható unióképzésre

Példák:

1. Egy pénzdarab feldobása esetén

$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$

De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így $\Omega = \{0, 1\}$. Nyilván

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\Big\}.$$

Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

2. n-szer dobva egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i = 0 \text{ vagy } 1\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$, $|2^\Omega| = 2^{2^n}$. Ha n darab egyforma pénzdarabot egyidőben dobunk fel, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetelekre szorítkozni: ezek száma $n+1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

3. Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy visszatevéssel vagy visszatevés nélkül húzunk (az utóbbi esetben $k \leqslant n$ szükséges), és aszerint, hogy a sorrend számít vagy nem számít. Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n-1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leqslant n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1)\cdots(n-k+1),$$

amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

  $$n^k,$$

  hiszen minden húzásnál n lehetőség van.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leqslant n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

  $$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

  hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n+k-1}{k},$$

amit úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, és úgy kell értelmezni, hogy az első egyesig levő nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb.; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván

$$\binom{n+k-1}{k},$$

hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

4. Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos közöt úgy, hogy sorban n_1, n_2, . . . , n_k kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma

$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!},$$

hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került n_1, n_2, . . . , n_k kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

5. Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor

$$\Omega = \{\mathrm{f}, \mathrm{if}, \mathrm{iif}, \mathrm{iiif}, \ldots, \mathrm{i}_\infty\},$$

ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

2. Valószínűség

n véletlen, független kísérletetet hajtunk végre

A : esemény

$k_n(A)$: A **gyakorisága;** (ahányszor A beköv.) véletlen mennyiség; lehetséges értékei: $0, 1, \ldots, n$

A **relatív gyakorisága:** $\nu_n(A) := \dfrac{k_n(A)}{n}$

Tapasztalat: egy A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy szám körül midőn n–et növeljük; ezt nevezzük A valószínűségének

Tulajdonságai:

- $0 \leqslant \nu_n(A) \leqslant 1$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,

- $\nu_n(\emptyset) = 0, \quad \nu_n(\Omega) = 1$

- ha A és B egymást kizáró események, akkor
$$\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$$

- ha A_1, A_2,... páronként egymást kizáróak, akkor
$$\nu_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_n(A_j)$$

- $\nu_n(\overline{A}) = 1 - \nu_n(A)$ ha $A \in \mathcal{A}$,

- ha $A \subset B$, akkor $\nu_n(A) \leqslant \nu_n(B)$

(De ezek a tulajdonságok nem függetlenek.)

Valószínűségi mező: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);

- $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra (az események);

- $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, melyre

  (a) $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,

  (b) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

  (c) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_j).$$

(Ezt a tulajdonságot $\boldsymbol{\sigma}$**-additivitásnak** nevezzük).

Tulajdonságai:

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$

  (hiszen ha $\mathsf{P}(\emptyset) > 0$ volna, akkor (c)-ben $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk)

- Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(A_j).$$
  Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük; úgy bizonyítható, hogy (c)-t alkalmazzuk $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

- $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$

  (hiszen $\Omega = A \cup \overline{A}$ diszjunkt felbontás, így $1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A})$)

- Ha $A \subset B$, akkor

$$\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B), \qquad \mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A).$$

  Ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük; úgy lehet belátni, hogy $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \setminus A) \geqslant \mathsf{P}(A).$$

- tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B),$$

  hiszen

$$A \cup B = \Big[A \setminus (A \cap B)\Big] \cup \Big[B \setminus (A \cap B)\Big] \cup (A \cap B)$$

  diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \Big[\mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)\Big] + \Big[\mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)\Big] + \mathsf{P}(A \cap B).$$

- tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A \cup B \cup C) \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) \\
&\quad - \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) \\
&\quad + \mathsf{P}(A \cap B \cap C),
\end{aligned}$$

hiszen

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big((A \cup B) \cup C\Big) \\
&= \mathsf{P}(A \cup B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}\Big((A \cup B) \cap C\Big),
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big((A \cup B) \cap C\Big) = \mathsf{P}\Big((A \cap C) \cup (B \cap C)\Big) \\
&= \mathsf{P}(A \cap C) + \mathsf{P}(B \cap C) \\
&\quad - \mathsf{P}\Big((A \cap C) \cap (B \cap C)\Big),
\end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Diszkrét valószínűségi mező: Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i \,:\, \omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i \,:\, \omega_i \in A} \mathsf{P}(\{\omega_i\}).$$

Ezért elég megadni az elemi események valószínűségeit, a $p_i := \mathsf{P}(\{\omega_i\})$ $(i = 1, 2, \dots)$ számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \ldots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \mathsf{P}\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = \mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\{p_1, p_2, \ldots\}$ **eloszlást** alkotnak.

Ha

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$$

és

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_N = \frac{1}{N},$$

akkor

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} p_i = \frac{1}{N} \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetelek száma}}.$$

Példák:

1. Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?

   Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

   $$\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fi}, \mathrm{if}, \mathrm{ii}\}$$

   eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetelek egyforma valószínűségűek, így az

   $$A = \{\mathrm{fi}, \mathrm{if}\}$$

   esemény valószínűsége

   $$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)

Nyilván $n > 365$ esetén (a ,,skatulya-elv'' miatt) ez biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

Ha pedig $n \leqslant 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$= 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

$$\approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16 \\ 0.476 & \text{ha } n = 22 \\ 0.507 & \text{ha } n = 23 \\ 0.891 & \text{ha } n = 40 \end{cases}$$

Valószínűségek geometriai kiszámítási módja

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$

,,minden pont egyenlő valószínűségű'', azaz egy $A \subset \Omega$ részhalmaz valószínűsége A mértékével arányos, vagyis

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén összhossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Példa: Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?

Jelölje a két, találomra kiválasztott pont helyét $x, y \in [0,1]$. A két pont találomra való kiválasztását úgy értelmezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy az (x, y) pont a $[0,1] \times [0,1]$ négyzet valamely részhalmazába esik, a részhalmaz területével arányos. A keresett valószínűség ezért annak a halmaznak a területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < y < 1, \quad 1 - y < y,$$
$$x < 1 - x, \quad y - x < 1 - y + x$$

vagy

$$0 < y < x < 1, \quad 1 - x < x,$$
$$y < 1 - y, \quad x - y < 1 - x + y,$$

azaz

$$0 < x < \frac{1}{2} < y < 1 \quad \text{és} \quad y - x < \frac{1}{2}$$

vagy

$$0 < y < \frac{1}{2} < x < 1 \quad \text{és} \quad x - y < \frac{1}{2}.$$

Ezért a keresett valószínűség 0.25.

3. Feltételes valószínűség

Tekintsük az A és B eseményeket.

Hogyan definiáljuk az $\boldsymbol{A}$ **esemény feltételes valószínűségét a** $\boldsymbol{B}$ **feltétel mellett** (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett) ?

n független kísérletet végzünk

$k_n(B)$ alkalommal következik be a B esemény

ezen esetekben $k_n(A \cap B)$ alkalommal következik be egyúttal az A esemény is

Így az $\boldsymbol{A}$ **esemény feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy** $\boldsymbol{B}$ **bekövetkezik**

$$\nu_n(A \mid B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{\nu_n(A \cap B)}{\nu_n(B)}.$$

Mivel a $\nu_n(B)$ és $\nu_n(A \cap B)$ relatív gyakoriságok a $\mathsf{P}(B)$ illetve $\mathsf{P}(A \cap B)$ valószínűségek körül ingadoznak, ezért természetes az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét a

$$\mathsf{P}(A \mid B) := \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

képlettel értelmezni, hacsak $\mathsf{P}(B) > 0$.

Példák:

1. Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha tudjuk, hogy

   - az idősebb gyerek fiú;
   - legalább az egyik gyerek fiú ?

   Ekkor az eseménytér

   $$\Omega = \{\mathsf{FF}, \mathsf{FL}, \mathsf{LF}, \mathsf{LL}\},$$

   melynek elemei egyformán 1/4 valószínűségűek. Legyen

   $$\begin{aligned} A &:= \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{\mathsf{FF}\}, \\ B_1 &:= \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{\mathsf{FF}, \mathsf{FL}\}, \\ B_2 &:= \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} \\ &= \{\mathsf{FF}, \mathsf{FL}, \mathsf{LF}\}. \end{aligned}$$

   Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{\mathsf{FF}\}$, így

   $$\mathsf{P}(A \mid B_1) = 1/2, \qquad \mathsf{P}(A \mid B_2) = 1/3.$$

2. Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott valaki. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van?

Az összes leosztások száma

$$\frac{52!}{(13!)^4},$$

ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$$

olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$$

olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van. Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{2}{19}.$$

Persze lehetne olyan eseményteret választani, amelynél számít a lapok sorrendje; ekkor az $|\Omega| = 52!$ számú elemi esemény újra egyenlő valószínűségű, de ekkor a kedvező esetek számánál is figyelembe kell venni a lapok sorrendjét!

Ezt az eredményt úgy is meg lehet kapni, hogy mivel az első játékosnak már kiosztottak 2 ászt, így az a kérdés, hogy a másik 2 ászt a lehetséges 39 egyenlő valószínűségű helyre kiosztva menynyi annak a valószínűsége, hogy mind a kettő a partner 13 lapja közé kerül? Ekkor az összes esetek száma $\binom{39}{2}$, a kedvező esetek száma pedig $\binom{13}{2}$, így az eredmény

$$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{39}{2}} = \frac{12 \cdot 13}{38 \cdot 39} = \frac{2}{19}.$$

(Hasonló módon annak a valószínűsége, hogy a partnernél 1 ász van: $\frac{26}{3 \cdot 19}$, annak a valószínűsége pedig, hogy a partnernél nincs ász: $\frac{25}{3 \cdot 19}$.)

Nyilván $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B \mid A)$ melynek általánosítása:

Láncszabály:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&\quad = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathsf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\
&\qquad \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}),
\end{aligned}$$

hacsak $\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

Bizonyítás. Az állítás igaz $n = 1$ esetén. Tegyük fel, hogy igaz $n = k$–ra. Mivel

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \\
&\quad = \frac{\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1})}{\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)},
\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}) \\
&\quad = \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \\
&\qquad \times \mathsf{P}(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k),
\end{aligned}$$

amiből az indukciós feltevést használva kapjuk az állítást $n = k + 1$-re. $\square$

Példa: Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?

Jelölje A_i $(i = 1, 2, 3)$ azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$\mathsf{P}(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \qquad \mathsf{P}(\overline{A}_2 \,|\, A_1) = \frac{24}{31},$$

$$\mathsf{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$\mathsf{P}(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor

$$|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30,$$

és a kimenetelek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\dfrac{8 \cdot 24 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \dfrac{7}{155}$.

Teljes eseményrendszer: az eseménytér megszámlálható diszjunkt felbontása, azaz események A_1, A_2, ... véges vagy végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és összegük az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \quad \text{és} \quad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i \mathsf{P}(A_i) = 1.$$

Teljes valószínűség tétele:
Ha az A_1, A_2, ... pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$\mathsf{P}(B) = \sum_i \mathsf{P}(B \mid A_i) \cdot \mathsf{P}(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván

$$B = \bigcup_i (B \cap A_i)$$

diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_k A_k) = \bigcup_k (B \cap A_k),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért $\mathsf{P}(B) = \sum\limits_i \mathsf{P}(B \cap A_i)$, amiből a

$$\mathsf{P}(B \cap A_i) = \mathsf{P}(B \mid A_i) \cdot \mathsf{P}(A_i)$$

összefüggés felhasználásával kapjuk az állítást. $\square$

Példa: Három gép csavarokat gyárt.
A selejt aránya

- az első gépnél 1 %,
- a másodiknál 2 %,
- a harmadiknál 3 %.

Az össztermék

- 50 %-át az első gép,
- 30 %-át a második,
- 20 %-át a harmadik

állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, A_i $(i = 1, 2, 3)$ pedig azt, hogy a kihúzott csavar az i-edik gépen készült. Ekkor nyilván

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(B|A_1) &= 0.01, & \mathsf{P}(A_1) &= 0.5, \\ \mathsf{P}(B|A_2) &= 0.02, & \mathsf{P}(A_2) &= 0.3, \\ \mathsf{P}(B|A_3) &= 0.03, & \mathsf{P}(A_3) &= 0.2, \end{aligned}$$

így

$$\mathsf{P}(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

Bayes–formula: Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B \mid A)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Bizonyítás. $\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$ és $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B \mid A)$. $\square$

Bayes–tétel: Ha az $A_1, A_2, \ldots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathsf{P}(B) > 0$, akkor

$$\mathsf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A_i) \cdot \mathsf{P}(B \mid A_i)}{\sum_j \mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)}.$$

Bizonyítás. A Bayes–formulát alkalmazva

$$\mathsf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A_i) \cdot \mathsf{P}(B \mid A_i)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Ezután a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathsf{P}(B) = \sum_j \mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j). \qquad \square$$

Példa: Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?

$$\mathsf{P}(A_1 \mid B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \qquad \mathsf{P}(A_2 \mid B) = \frac{6}{17}$$

$$\mathsf{P}(A_3 \mid B) = \frac{6}{17}.$$

4. Függetlenség

Akkor tartunk két eseményt függetleneknek egymástól, ha az egyik bekövetkezésével kapcsolatos információ nem változtatja meg a másik esemény bekövetkezésének esélyéről alkotott véleményünket.

Ezért pozitív valószínűségű A és B eseményeket akkor nevezünk függetleneknek, ha

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A), \qquad \mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B)$$

teljesül.

Mindkét feltétel a $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$ összefüggéssel ekvivalens. Ennek akkor is van értelme, ha A vagy B valószínűsége 0. Ezért az általános definíció a következő:

Azt mondjuk, hogy az ***A* és *B* események függetlenek**, ha

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Az Ω biztos esemény és az $\emptyset$ lehetetlen esemény minden eseménytől független.

Ha A és B függetlenek, akkor $\overline{A}$ és B, A és $\overline{B}$, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek.

Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{A_1}$**,** $\boldsymbol{A_2}$**, . . . események páronként függetlenek**, ha közülük bármely két esemény független.

Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{A_1}$**,** $\boldsymbol{A_2}$**, . . . események (teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges i_1, i_2, . . . , i_k különböző indexekre

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathsf{P}(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

5. Valószínűségi változók

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ valószínűségi mező

Valószínűségi változó: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Valószínűségi vektorváltozó: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$

$\boldsymbol{\xi}$ **diszkrét valószínűségi változó**, ha az

$$X := \{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$$

értékkészlet véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ alakú

$\boldsymbol{\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}}$ **nívóhalmaz:** azon elemi események halmaza, melyeknél ξ az x_i értéket veszi fel

Ezért $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2 \ldots$ kell

$\boldsymbol{\xi}$ **eloszlása:** $p_\xi(x_i)$, $i = 1, 2 \ldots$, ahol

$$p_\xi(x_i) := \mathsf{P}\{\xi = x_i\} := \mathsf{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\})$$

Nyilván

$$p_\xi(x_i) \geqslant 0, \quad i = 1, 2 \ldots, \quad \text{és} \quad \sum_i p_\xi(x_i) = 1,$$

hiszen az $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2 \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

Példák:

1. Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ.

   Ekkor ξ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{2, 3, \dots, 12\},$$

   eloszlása:

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \begin{cases} \dfrac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant k \leqslant 7, \\[2ex] \dfrac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leqslant k \leqslant 12. \end{cases}$$

2. **Binomiális eloszlás.**

n független kísérlet
A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$
A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$
diszkrét valószínűségi változó;
lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

melyet $\boldsymbol{n}$**–edrendű** $\boldsymbol{p}$ **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

3. **Negatív binomiális eloszlás.**

A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$
Addig végzünk független kísérleteket, amíg A először bekövetkezik.
$\xi :=$ az ehhez szükséges kísérletek száma; lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \dots, \infty\},$$

eloszlása: $k = 1, 2, \dots$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

így

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{\xi = \infty\} &= 1 - \mathsf{P}\{\xi < \infty\} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi = k\} \\ &= 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű $\boldsymbol{p}$ paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** nevezzük.

4. **Hipergeometrikus eloszlás.**

Egy urnában M piros és $N-M$ fekete golyó van ($M<N$). Visszatevéssel húzunk n golyót. Jelölje ξ a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ lehetséges értékeinek halmaza $X=\{0,1,\ldots,n\}$, és

$$\mathsf{P}\{\xi=k\}=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k},$$

tehát ξ eloszlása n-edrendű M/N paraméterű binomiális eloszlás.

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n\leqslant N$), és megint ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát, akkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0\leqslant k\leqslant n$, $k\leqslant M$, és $n-k\leqslant N-M$, továbbá

$$\mathsf{P}\{\xi=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $\boldsymbol{(M,N-M,n)}$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

4. **Poisson eloszlás.**

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül ,,mozognak''. Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \ldots, 50\}$, eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k},$$

tehát ξ eloszlása n-edrendű $1/N$ paraméterű binomiális eloszlás.

Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét? Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztába, akkor $N = 20 \cdot n / 25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere

$p_n := 1/N = \lambda/n$, ahol $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

hiszen

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Ha egy η valószínűségi változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \ldots$ esetén

$$\mathrm{P}(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása $\boldsymbol{\lambda}$ **paraméterű Poisson–eloszlás**.

Tetszőleges $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó esetén

$$\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\} \in \mathcal{A}$$

kell minden $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumra; ehhez pontosan az kell, hogy $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ teljesüljön tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

Definíció: A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezés **valószínűségi változó**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$.

Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := \mathsf{P}\{\xi < x\}$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Tétel. Egy $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

(a) F monoton növekvő,

(b) F balról folytonos,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F valamely ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

(a) Ha $x_1 \leqslant x_2$, akkor

$$\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$$

miatt

$$F(x_1) = \mathsf{P}\{\xi < x_1\} \leqslant \mathsf{P}\{\xi < x_2\} = F(x_2).$$

(b) Azt kell megmutatni, hogy ha $x_n \uparrow x$, akkor $F(x_n) \to F(x)$. Tekintsük a

$$\{\xi < x\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \cup \{x_2 \leqslant \xi < x_3\} \cup \dots$$

diszjunkt felbontást. Ez alapján

$$\mathsf{P}\{\xi < x\} = \mathsf{P}\{\xi < x_1\} + \mathsf{P}\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} + \mathsf{P}\{x_2 \leqslant \xi < x_3\} + \cdots,$$

azaz

$$F(x) = F(x_1) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \cdots$$

hiszen $a \leqslant b$ esetén

$$\{a \leqslant \xi < b\} = \{\xi < b\} \setminus \{\xi < a\}$$

miatt

$$P\{a \leqslant \xi < b\} = P\{\xi < b\} - P\{\xi < a\} = F(b) - F(a).$$

Végül

$$F(x) = F(x_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k))$$

$$= F(x_1) + \lim_{n\to\infty} (F(x_n) - F(x_1)) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Példák:

1. Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ lehetséges értékekkel és $\mathsf{P}\{\xi = x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eloszlással, akkor ξ eloszlásfüggvénye egy olyan balról folytonos lépcsősfüggvény, melynek az ugráshelyei éppen az $x_1, x_2, \ldots$ pontok, és az ugrás nagysága az x_i pontban $\mathsf{P}\{\xi = x_i\}$, ugyanis ekkor

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \sum_{i\,:\,x_i < x} \mathsf{P}\{\xi = x_i\}.$$

2. Ha a $[0, 1]$ intervallumon válsztunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset [0, 1]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ x & \text{ha } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a $[0, 1]$ intervallumon.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ valószínűségi mező

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük. (Nem egyértelműen definiált!)

Ha $a < b$, akkor

$$\mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $F_\xi'(x) = f_\xi(x)$.

Példa: Ha ξ egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, akkor az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ–nek

Tétel. Egy $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Bizonyítás. Ha f valamely ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1.$$

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, akkor az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

függvény monoton növekvő, folytonos és

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,$$

ezért eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változónak. $\square$

Példák:

1. Ha ξ **egyenletes eloszlású** a $[0,1]$ intervallumon, akkor a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}})$ **paraméterekkel**. Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, abból következik, hogy

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\left[-r\mathrm{e}^{-r^2/2}\right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi.\end{aligned}$$

3. **Exponenciális eloszlás.**

Jelölje a ξ valószínűségi változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal:** ha $t, h > 0$, akkor

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant t + h \mid \xi \geqslant t\} = \mathsf{P}\{\xi \geqslant h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant t + h \mid \xi \geqslant t\} = \frac{\mathsf{P}\{\xi \geqslant t + h,\, \xi \geqslant t\}}{\mathsf{P}\{\xi \geqslant t\}},$$

és $\mathsf{P}\{\xi \geqslant t + h,\, \xi \geqslant t\} = \mathsf{P}\{\xi \geqslant t + h\}$, ezért a $G(t) := \mathsf{P}\{\xi \geqslant t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t+h)}{G(t)} = G(h).$$

Be lehet látni, hogy ha G folytonos, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \text{ha} \quad t > 0.$$

Ezért ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást $\boldsymbol{\lambda}$ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Van sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bomlási állandó:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}\{t \leqslant \xi < t + h \mid \xi \geqslant t\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}) = \lambda,$$

ami azt jelenti, hogy kis $h > 0$ időtartam esetén $\mathrm{P}\{t \leqslant \xi < t + h \mid \xi \geqslant t\} \approx \lambda h$, azaz a h időtartam alatti lebomlás valószínűsége h-val arányos, és az arányossági tényező λ.

Felezési idő alatt azt a T időtartamot értjük, amennyi idő alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel bomlik el egy radioaktív atom; ekkor ugyanis a radioaktív anyagnak közelítőleg fele bomlik el. Mivel

$$\frac{1}{2} = \mathsf{P}\{\xi < T\} = F(T) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda T},$$

így

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

ezért a felezési idő fordítottan arányos a bomlási állandóval.

Valószínűségi vektorváltozó: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$, azaz

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ val. változók;

eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) := \mathsf{P}\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k\}$$

Egy $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi vektorváltozónak, ha

1. $F(y_1, y_2) - F(x_1, y_2) - F(y_1, x_2) + F(x_1, x_2) \geqslant 0$ tetszőleges $x_1 \leqslant y_1$ és $x_2 \leqslant y_2$ esetén;

2. F balról folytonos mindkét változójában;

3. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = \lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$,
$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1.$$

Ha (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó, akkor persze ξ és η is diszkrét valószínűségi változók.

Jelölje ξ lehetséges értékeit $x_1, x_2, \ldots,$ az η lehetséges értékeit pedig $y_1, y_2, \ldots$. Ekkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza

$$X = \{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \ldots\}.$$

Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a

$$\mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\}$$

valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$\mathsf{P}\{\xi = x_i\} = \sum_j \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\},$$

$$\mathsf{P}\{\eta = y_j\} = \sum_i \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\}.$$

Ezeket (ξ, η) **peremeloszlásainak (vagy marginális eloszlásainak)** nevezzük.

Példák:

1. **Polinomiális eloszlás.**

   n független kísérlet
   $A_1, A_2, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszer,
   $p_i := \mathsf{P}(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$)
   A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$
   $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó; értékkészlete:

   $$X = \{(k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : \\ k_i \geqslant 0,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n\},$$

   eloszlása

   $$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1,\ \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\}$$

   $$= \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

   melyet $\boldsymbol{n}$**–edrendű** $(\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots, p_r})$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk. Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

   $$\mathsf{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!} p_i^{k_i} (1-p_i)^{n-k_i}.$$

2. Egy urnában r különböző színű golyó van, az i-edik színből N_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, így összesen $N := N_1 + N_2 + \cdots + N_r$ golyó van. Visszatevéssel húzunk n golyót. Jelölje ξ_i az i-edik színből húzott golyók számát. Ekkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ lehetséges értékeinek halmaza

$$X = \{(k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : \\ k_i \geqslant 0,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n\},$$

eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1,\, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\}$$

$$= \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{k_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{N_r}{N}\right)^{k_r},$$

tehát ξ eloszlása n-edrendű

$$\left(\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \ldots, \frac{N_r}{N}\right)$$

paraméterű polinomiális eloszlás.

3. **Polihipergeometrikus eloszlás.**

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót $(n \leqslant N)$, és megint ξ_i jelöli az i-edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \dots, r$ esetén teljesül $0 \leqslant k_i \leqslant N_i$, és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, továbbá

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\}$$

$$= \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(\boldsymbol{N_1, \dots, N_r, n})$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$\mathsf{P}\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i}\binom{N-N_i}{n-k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük. Nyilván

$$\mathsf{P}\{a_i \leqslant \xi_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, k\}$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k,$$

sőt tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$\mathsf{P}\{(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in B\}$$

$$= \int \cdots \int_B f_\xi(t_1, \ldots, t_k)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k,$$

továbbá ha F_ξ folytonosan differenciálható, akkor

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\partial^k F_\xi(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1 \ldots \partial x_k}.$$

Függetlenség

A ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi < x, \eta < y\} = \mathsf{P}\{\xi < x\}\mathsf{P}\{\eta < y\}$$

azaz $F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét valószínűségi változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\forall i, j \qquad \mathsf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = \mathsf{P}\{\xi = x_i\}\mathsf{P}\{\eta = y_j\}$$

ekvivalens ξ és η függetlenségével.

Ha létezik (ξ, η)-nak $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ is ekvivalens a függetlenséggel.

Hasonlóan lehet értelmezni több valószínűségi változó függetlenségét.

Konvolúció

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi+\eta$ eloszlása a $\boldsymbol{\xi}$ **és** $\boldsymbol{\eta}$ **eloszlásának konvolúciója**.

Példák:

1. Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és a lehetséges értékeik egész számok, akkor a

$$\{\xi+\eta=k\}=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}(\{\xi=j\}\cap\{\eta=k-j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$\mathsf{P}\{\xi+\eta=k\}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathsf{P}\{\xi=j\}\mathsf{P}\{\eta=k-j\}.$$

Például ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig (n_1+n_2, p) paraméterekkel, ugyanis

$$\mathsf{P}\{\xi = i\} = \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n_1$$

$$\mathsf{P}\{\eta = j\} = \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_2$$

alapján

$$\mathsf{P}\{\xi + \eta = k\}$$

$$= \sum_{i,j\,:\,i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j}$$

$$= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i,j\,:\,i+j=k} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{j}$$

$$= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

2. Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor

$$\begin{aligned}
F_{\xi+\eta}(x) &= \mathsf{P}\{\xi+\eta<x\} \\
&= \iint\limits_{u+v<x} f_{\xi,\eta}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint\limits_{u+v<x} f_\xi(u) f_\eta(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x-u} f_\eta(v)\,\mathrm{d}v\right) f_\xi(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

alapján

$$\begin{aligned}
f_{\xi+\eta}(x) &= F'_{\xi+\eta}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x-u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Például ha ξ_1 és ξ_2 független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ paraméterekkel, ugyanis

$$f_{\xi_i}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

alapján

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.$$

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényeik, akkor

$$\begin{aligned}
F_{\xi\cdot\eta}(x) &= \mathsf{P}\{\xi\cdot\eta < x\} \\
&= \iint\limits_{u\cdot v<x} f_{\xi,\eta}(u,v)\,\mathsf{d}u\,\mathsf{d}v \\
&= \iint\limits_{u\cdot v<x} f_\xi(u) f_\eta(v)\,\mathsf{d}u\,\mathsf{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{x/u}^{\infty} f_\eta(v)\,\mathsf{d}v\right) f_\xi(u)\,\mathsf{d}u \\
&\quad + \int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x/u} f_\eta(v)\,\mathsf{d}v\right) f_\xi(u)\,\mathsf{d}u
\end{aligned}$$

alapján

$$
\begin{aligned}
f_{\xi\cdot\eta}(x) &= F'_{\xi\cdot\eta}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(-\frac{1}{u}\right) f_\eta\left(\frac{x}{u}\right) f_\xi(u)\,\mathrm{d}u \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{u} f_\eta\left(\frac{x}{u}\right) f_\xi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_\xi(u) f_\eta\left(\frac{x}{u}\right)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

6. Várható érték

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót $x_1, \ldots, x_N$ lehetséges értékekkel és $\mathsf{P}\{\xi = x_k\}$, $k = 1, \ldots, N$ eloszlással.

n független kísérlet

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$\frac{k_n(A_k)}{n} \approx \mathsf{P}(A_k),$$

ezért $k_n(A_k) \approx n \cdot \mathsf{P}(A_k)$, vagyis az x_k értéket körülbelül $n \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, így a megfigyelt értékek átlaga körülbelül

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot n \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}.$$

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel és $\mathsf{P}\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ eloszlással, akkor az

$$\mathsf{E}\,\xi := \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz

$$\sum_k |x_k| \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} < \infty.$$

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, akkor az

$$\mathsf{E}\,\xi := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Példák:

1. Ha ξ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel, akkor

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ha $k = 0, 1, \ldots, n$, ezért

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\xi &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Tehát például ha egy $p > 0$ valószínűségű A eseményre elvégzünk n független megfigyelést, akkor a gyakoriság várható értéke $\mathsf{E}(k_n(A)) = np$.

2. Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0 \\ 1-(1-2x)^2 & \text{ha } 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

ezért a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 4-8x & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

így a várható értéke

$$\mathsf{E}\xi = \int_0^{1/2} x(4-8x)\,dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

3. Az A és B játékosok a következő játékot játszák. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n-edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B-től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A-tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?

Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei 2, -4, 8, -16, ... és

$$\mathrm{P}\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Mivel

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty,$$

így ξ várható értéke nem létezik!

4. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Ezt az eloszlást **Cauchy-eloszlásnak** nevezzük.

Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \lim_{K\to\infty} \int_0^K \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \lim_{K\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=K}$$

$$= 2 \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2\pi}\ln(1+K^2)$$

$$= \infty,$$

ezért ξ-nek nem létezik várható értéke.

Tulajdonságok

Homogén: ha ξ valószínűségi változó és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathsf{E}(c \cdot \xi) = c \cdot \mathsf{E}\,\xi.$$

Bizonyítás: ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}(c \cdot \xi) = \sum_k c \cdot x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} = c \cdot \mathsf{E}\,\xi.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel és $c \neq 0$, akkor a $c \cdot \xi$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_{c \cdot \xi}(x) = \frac{1}{|c|} f_\xi\left(\frac{x}{c}\right),$$

ugyanis $c \cdot \xi$ eloszlásfüggvénye

$$F_{c \cdot \xi} = \mathsf{P}\{c \cdot \xi < x\} = \begin{cases} \mathsf{P}\left(\xi < \frac{x}{c}\right) & \text{ha } c > 0, \\ \mathsf{P}\left(\xi > \frac{x}{c}\right) & \text{ha } c < 0, \end{cases}$$

így

$$\mathsf{E}(c \cdot \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|c|} f_\xi\left(\frac{x}{c}\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} c x f_\xi(x)\, \mathrm{d}x = c \cdot \mathsf{E}\,\xi.$$

Additív: ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\mathsf{E}(\xi+\eta) = \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta.$$

Bizonyítás: ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots$ illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor $\xi+\eta$ lehetséges értékei

$$x_i + y_j, \qquad i, j = 1, 2, \dots,$$

így

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\xi+\eta) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j) \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} \\
&= \sum_i x_i \sum_j \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} \\
&\quad + \sum_j y_j \sum_i \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} \\
&= \sum_i x_i \mathsf{P}\{\xi = x_i\} + \sum_j y_j \mathsf{P}\{\eta = y_j\} \\
&= \mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\eta.
\end{aligned}$$

Ha ξ és η abszolút folytonos valószínűségi változók f_ξ illetve f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi+\eta$ sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)f_\eta(z-u)\,\mathrm{d}u,$$

így

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\xi+\eta)&=\int_{-\infty}^{\infty} z\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)f_\eta(z-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\int_{-\infty}^{\infty} zf_\eta(z-u)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

ahol $z=u-v$ helyettesítéssel

$$\int_{-\infty}^{\infty} zf_\eta(z-u)\,\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}(u+v)f_\eta(v)\,\mathrm{d}v=u+\mathsf{E}\,\eta,$$

ezért

$$\mathsf{E}(\xi+\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)(u+\mathsf{E}\,\eta)\,\mathrm{d}u=\mathsf{E}\,\xi+\mathsf{E}\,\eta.$$

Lineáris: ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = a\mathsf{E}\xi + b\mathsf{E}\eta.$$

Bizonyítás:

$$\mathsf{E}(a\xi + b\eta) = \mathsf{E}(a\xi) + \mathsf{E}(b\eta) = a\mathsf{E}\xi + b\mathsf{E}\eta.$$

Pozitív funkcionál: ha ξ nemnegatív valószínűségi változó, akkor

$$\mathsf{E}\,\xi \geqslant 0.$$

Bizonyítás: ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ nemnegatív lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} \geqslant 0.$$

Ha ξ abszolút folytonos nemnegatív valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor $f_\xi(x) = 0$ ha $x \leqslant 0$, ezért

$$\mathsf{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Monoton: ha $\xi \leqslant \eta$, akkor

$$\mathsf{E}\,\xi \leqslant \mathsf{E}\,\eta.$$

Bizonyítás: $\eta - \xi \geqslant 0$ miatt $\mathsf{E}(\eta - \xi) \geqslant 0$, továbbá

$$\mathsf{E}(\eta - \xi) = \mathsf{E}\Big(\eta + (-1)\xi\Big) = \mathsf{E}\,\eta - \mathsf{E}\,\xi.$$

Abszolút érték:

$$|\mathsf{E}\xi| \leqslant \mathsf{E}|\xi|.$$

Bizonyítás: $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$ alapján a monotonitásból

$$\mathsf{E}\Big(-|\xi|\Big) \leqslant \mathsf{E}\xi \leqslant \mathsf{E}|\xi|,$$

ahol $\mathsf{E}\Big(-|\xi|\Big) = -\mathsf{E}|\xi|$.

Konstans várható értéke: Ha $\xi(\omega) = c$ minden $\omega \in \Omega$ esetén ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $\mathsf{E}\,\xi = c$.

Független valószínűségi változók szorzatának várható értéke: Ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Bizonyítás: ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók $x_1, x_2, \ldots$ illetve $y_1, y_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor $\xi \cdot \eta$ lehetséges értékei

$$x_i \cdot y_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots,$$

így

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\xi\eta) &= \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} \\
&= \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_i\} \cdot \mathsf{P}\{\eta = y_j\} \\
&= \sum_{i} x_i \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_i\} \cdot \sum_{j} y_j \cdot \mathsf{P}\{\eta = y_j\} \\
&= \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.
\end{aligned}$$

Ha ξ és η abszolút folytonos valószínűségi változók f_ξ illetve f_η sűrűségfüggvénnyel, akkor $\xi \cdot \eta$ sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi\cdot\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_\xi(u) f_\eta\left(\frac{z}{u}\right) \mathrm{d}u,$$

így

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\xi\cdot\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_\xi(u) f_\eta\left(\frac{z}{u}\right) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_\xi(u) \int_{-\infty}^{\infty} z f_\eta\left(\frac{z}{u}\right) \mathrm{d}z\, \mathrm{d}u,\end{aligned}$$

ahol $\frac{z}{u} = v$ helyettesítéssel

$$\int_{-\infty}^{\infty} z f_\eta\left(\frac{z}{u}\right) \mathrm{d}u = u|u| \int_{-\infty}^{\infty} v f_\eta(v)\, \mathrm{d}v = u|u| \mathsf{E}\,\eta,$$

ezért

$$\mathsf{E}(\xi\cdot\eta) = \mathsf{E}\,\eta \int_{-\infty}^{\infty} u f_\xi(u)\, \mathrm{d}u = \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta.$$

Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség:

$$\mathsf{E}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathsf{E}\xi^2\,\mathsf{E}\eta^2}.$$

Bizonyítás: tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathsf{E}\Big(|\xi| - \lambda|\eta|\Big)^2 \geqslant 0,$$

azaz

$$\lambda^2\mathsf{E}\eta^2 - 2\lambda\mathsf{E}|\xi\eta| + \mathsf{E}\xi^2 \geqslant 0,$$

így a diszkriminánsa nem pozitív:

$$4\Big(\mathsf{E}|\xi\eta|\Big)^2 - 4\mathsf{E}\xi^2\,\mathsf{E}\eta^2 \leqslant 0.$$

Valószínűségi változó függvényének várható értéke:

Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \sum_k g(x_k) \cdot \mathsf{P}\{\xi = k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathsf{E}\, g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Variancia=szórásnégyzet:

$$\operatorname{var}\xi := \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)^2\Big].$$

Más jelölés: $\mathsf{D}^2\xi$.

Kiszámolása:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\xi &= \mathsf{E}\Big[\xi^2 - 2\xi\mathsf{E}\xi + (\mathsf{E}\xi)^2\Big]\\ &= \mathsf{E}(\xi^2) - 2\cdot\mathsf{E}\,\xi\cdot\mathsf{E}\,\xi + (\mathsf{E}\xi)^2\\ &= \mathsf{E}(\xi^2) - (\mathsf{E}\xi)^2,\end{aligned}$$

így ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\operatorname{var}\xi = \sum_k x_k^2\cdot\mathsf{P}\{\xi = k\} - \left(\sum_k x_k\cdot\mathsf{P}\{\xi = k\}\right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\operatorname{var}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Tulajdonságok

Eltolásinvariáns: ha ξ valószínűségi változó és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathsf{var}(\xi + c) = \mathsf{var}\,\xi.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(\xi + c) &= \mathsf{E}\Big[(\xi + c) - \mathsf{E}(\xi + c)\Big]^2 \\ &= \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)^2\Big] = \mathsf{var}\,\xi.\end{aligned}$$

Homogén: ha ξ valószínűségi változó és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$\mathsf{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \mathsf{var}\,\xi.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(c \cdot \xi) &= \mathsf{E}\Big[(c \cdot \xi) - \mathsf{E}(c \cdot \xi)\Big]^2 \\ &= c^2 \cdot \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)^2\Big] = c^2 \cdot \mathsf{var}\,\xi.\end{aligned}$$

Addíciós képlet:

$$\mathsf{var}(\xi + \eta) = \mathsf{var}\,\xi + 2\,\mathsf{cov}(\xi, \eta) + \mathsf{var}\,\eta,$$

ahol

$$\mathsf{cov}(\xi, \eta) := \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta)\Big]$$

a $\boldsymbol{\xi}$ **és** $\boldsymbol{\eta}$ **kovarianciája**.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}(\xi + \eta) &= \mathsf{E}\Big[(\xi + \eta) - \mathsf{E}(\xi + \eta)\Big]^2 \\
&= \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\,\xi) + (\eta - \mathsf{E}\,\eta)\Big]^2 \\
&= \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)^2\Big] + 2\mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)(\eta - \mathsf{E}\eta)\Big] \\
&\quad + \mathsf{E}\Big[(\eta - \mathsf{E}\eta)^2\Big] \\
&= \mathsf{var}\,\xi + 2\,\mathsf{cov}(\xi, \eta) + \mathsf{var}\,\eta.
\end{aligned}$$

Független valószínűségi változók összegének varianciája: Ha ξ és η függetlenek, akkor

$$\operatorname{var}(\xi+\eta) = \operatorname{var}\xi + \operatorname{var}\eta.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\eta) &= \mathsf{E}\Big[\xi\eta - \xi\,\mathsf{E}\,\eta - \eta\,\mathsf{E}\,\xi + \mathsf{E}\,\xi\,\mathsf{E}\,\eta\Big] \\ &= \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}\,\xi\,\mathsf{E}\eta,\end{aligned}$$

és a függetlenség miatt

$$\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{E}\,\xi\,\mathsf{E}\eta,$$

így

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0.$$

Példa: Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0,1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$\mathsf{E}\,\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K\to-\infty \\ L\to+\infty}} \left[-\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\mathsf{E}(\eta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K\to-\infty \\ L\to+\infty}} \left(\left[-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=K}^{x=L} + \int_K^L \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1,$$

$$\mathrm{var}\,\xi = \mathsf{E}(\eta^2) - \left(\mathsf{E}\,\eta\right)^2 = 1.$$

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor ξ előáll

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m$$

alakban ahol η standard normális eloszlású, hiszen $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$ alapján η eloszlásfüggvénye

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < x\right\}$$

$$= \mathsf{P}\{\xi < \sigma \cdot x + m\} = F_\xi(\sigma \cdot x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = \sigma \cdot F_\xi'(\sigma x + m)$$

$$= \sigma \cdot f_\xi(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

ezért

$$\mathsf{E}\,\xi = \sigma \cdot \mathsf{E}\,\eta + m = m,$$

$$\operatorname{var}\xi = \sigma^2 \cdot \operatorname{var}\eta = \sigma^2.$$

Korrelációs együttható:

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) := \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\operatorname{var} \xi \cdot \operatorname{var} \eta}}.$$

Ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$ azaz $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{\xi}$ **és** $\boldsymbol{\eta}$ **korrelálatlanok**.

Ha

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) > 0 \quad \text{azaz} \quad \operatorname{cov}(\xi, \eta) > 0,$$

akkor $\boldsymbol{\xi}$ **és** $\boldsymbol{\eta}$ **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) < 0 \quad \text{azaz} \quad \operatorname{cov}(\xi, \eta) < 0,$$

akkor $\boldsymbol{\xi}$ **és** $\boldsymbol{\eta}$ **negatívan korreláltak**.

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz, azaz lehet konstruálni olyan ξ, η valószínűségi változókat, melyek korrelálatlanok, de nem függetlenek.

Példa: legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontokon, azaz

$$\mathsf{P}\{\xi = -1,\, \eta = 0\} = \mathsf{P}\{\xi = 0,\, \eta = -1\}$$

$$= \mathsf{P}\{\xi = 0,\, \eta = 1\} = \mathsf{P}\{\xi = 1,\, \eta = 0\} = \frac{1}{4}.$$

Ekkor $\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta = 0$ és $\mathsf{E}(\xi\eta) = 0$ miatt

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{E}(\xi\eta) - \mathsf{E}\,\xi \cdot \mathsf{E}\,\eta = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$\mathsf{P}\{\xi = -1\} = \mathsf{P}\{\xi = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}\{\xi = 0\} = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}\{\eta = -1\} = \mathsf{P}\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{2},$$

ezért ξ és η függetlenek, hiszen például

$$\mathsf{P}\{\xi = 1,\, \eta = 0\} = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}\{\xi = 1\}\cdot\mathsf{P}\{\eta = 0\} = \frac{1}{8}.$$

Tulajdonságok:

szimmetrikus:

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{cov}(\eta,\xi), \quad \mathrm{corr}(\xi,\eta) = \mathrm{corr}(\eta,\xi)$$

bilineáris:

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j\eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{cov}(\xi_i,\eta_j)$$

varianciával való kapcsolat:

$$\mathrm{var}\,\xi = \mathrm{cov}(\xi,\xi)$$

Tétel:

$$|\mathrm{corr}(\xi,\eta)| \leqslant 1,$$

és $|\mathrm{corr}(\xi,\eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal

$$\mathrm{P}\{\eta = a\cdot\xi + b\} = 1$$

teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = 1$ illetve $\mathrm{corr}(\xi,\eta) = -1$.

Bizonyítás.

A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség alapján

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{cov}(\xi,\eta)| &= \Big|\mathsf{E}((\xi-\mathsf{E}\xi)(\eta-\mathsf{E}\eta))\Big| \\
&\leqslant \mathsf{E}\Big|(\xi-\mathsf{E}\xi)(\eta-\mathsf{E}\eta)\Big| \\
&\leqslant \sqrt{\mathsf{E}(\xi-\mathsf{E}\xi)^2\cdot\mathsf{E}(\eta-\mathsf{E}\eta)^2} \\
&= \sqrt{\mathrm{var}\,\xi\cdot\mathrm{var}\,\eta},
\end{aligned}
$$

így

$$|\mathrm{corr}(\xi,\eta)|\leqslant 1.$$

Legyen továbbá

$$\tilde{\xi} := \frac{\xi-\mathsf{E}\,\xi}{\sqrt{\mathrm{var}\,\xi}}, \qquad \tilde{\eta} := \frac{\eta-\mathsf{E}\,\eta}{\sqrt{\mathrm{var}\,\eta}}.$$

Nyilván $\mathsf{E}\,\tilde{\xi} = \mathsf{E}\,\tilde{\eta} = 0$ és $\mathsf{E}\Big(\tilde{\xi}^{\,2}\Big) = \mathsf{E}\Big(\tilde{\eta}^{\,2}\Big) = 1.$

(Ezért $\mathrm{var}\,\tilde{\xi} = \mathrm{var}\,\tilde{\eta} = 1$; ezeket ξ, illetve η **standardizáltjának** nevezzük.)

Ha $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=1$, akkor $\mathsf{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta})=1$, így

$$\mathsf{E}\Big[(\tilde{\xi}-\tilde{\eta})^2\Big]=\mathsf{E}\Big(\tilde{\xi}^{\,2}\Big)-2\mathsf{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta})+\mathsf{E}\Big(\tilde{\eta}^{\,2}\Big)=0,$$

ezért $\mathsf{P}\{(\tilde{\xi}-\tilde{\eta})^2=0\}=1$, így $\mathsf{P}\{\tilde{\xi}=\tilde{\eta}\}=1$, azaz

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\xi-\mathsf{E}\,\xi}{\sqrt{\operatorname{var}\xi}}=\frac{\eta-\mathsf{E}\,\eta}{\sqrt{\operatorname{var}\eta}}\right\}=1,$$

vagyis

$$\mathsf{P}\left\{\eta=\mathsf{E}\eta+\sqrt{\frac{\operatorname{var}\eta}{\operatorname{var}\xi}}(\xi-\mathsf{E}\,\xi)\right\}=1.$$

Ha $\operatorname{corr}(\xi,\eta)=-1$, akkor $\mathsf{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta})=-1$, így

$$\mathsf{E}\Big[(\tilde{\xi}+\tilde{\eta})^2\Big]=\mathsf{E}\Big(\tilde{\xi}^{\,2}\Big)+2\mathsf{E}(\tilde{\xi}\tilde{\eta})+\mathsf{E}\Big(\tilde{\eta}^{\,2}\Big)=0,$$

ezért $\mathsf{P}\{(\tilde{\xi}+\tilde{\eta})^2=0\}=1$, így $\mathsf{P}\{\tilde{\xi}=-\tilde{\eta}\}=1$, azaz

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\xi-\mathsf{E}\,\xi}{\sqrt{\operatorname{var}\xi}}=-\frac{\eta-\mathsf{E}\,\eta}{\sqrt{\operatorname{var}\eta}}\right\}=1,$$

vagyis

$$\mathsf{P}\left\{\eta=\mathsf{E}\eta-\sqrt{\frac{\operatorname{var}\eta}{\operatorname{var}\xi}}(\xi-\mathsf{E}\,\xi)\right\}=1.$$

ξ valószínűségi változó, $k \in \mathbb{N}$

k**–adik momentum:** $\mathsf{E}(\xi^k)$

k**–adik centrális momentum:** $\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^k\right]$

k**–adik abszolút momentum:** $\mathsf{E}\left(|\xi|^k\right)$

k**–adik abszolút centrális momentum:**

$$\mathsf{E}\left[|\xi - \mathsf{E}\,\xi|^k\right]$$

Tehát $\mathsf{E}\,\xi$ az első momentum, $\mathrm{var}\,\xi$ pedig a második (abszolút) centrális momentum

ferdeség: $$\frac{\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^3\right]}{\left(\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2\right]\right)^{3/2}}$$

csúcsosság: $$\frac{\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^4\right]}{\left(\mathsf{E}\left[(\xi - \mathsf{E}\,\xi)^2\right]\right)^{2}}$$

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa: Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $\mathsf{E}\,\eta = 0$, $\operatorname{var}\eta = 1$,

$$\mathsf{E}(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-3x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 3\mathsf{E}(\eta^2) = 3,\end{aligned}$$

ezért a ferdesége 0, csúcsossága 3.

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége 0, csúcsossága 3.

Azt mondjuk, hogy az $m \in \mathbb{R}$ szám **mediánja** a ξ valószínűségi változónak, ha

$$\mathsf{P}\{\xi < m\} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{P}\{\xi > m\} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Legyen $q \in (0,1)$. A $c_q \in \mathbb{R}$ szám ***q*–kvantilise** a ξ valószínűségi változónak, ha

$$\mathsf{P}\{\xi < c_q\} \leqslant q, \qquad \mathsf{P}\{\xi > c_q\} \leqslant 1 - q.$$

Állítás: legyen

$$a := \inf\Big\{x \in \mathbb{R} : \mathsf{P}\{\xi > x\} \leqslant 1 - q\Big\},$$

$$b := \sup\Big\{x \in \mathbb{R} : \mathsf{P}\{\xi < x\} \leqslant q\Big\}.$$

Ekkor $a \leqslant b$, és egy $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor q–kvantilise ξ–nek, ha $a \leqslant c \leqslant b$.

Szokták csak az $\frac{a+b}{2}$ számot tekinteni a q–kvantilisnek.

Interkvartilis: $c_{3/4} - c_{1/4}$

Ha az

$$F_\xi(x) = q$$

egyenletnek van megoldása de csak egy, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ megoldás az egyetlen q–kvantilis.

Speciálisan, ha az F_ξ eloszlásfüggvény folytonos és szigorúan monoton növekvő, akkor az

$$F_\xi(x) = q$$

egyenlet egyetlen megoldása az egyetlen q–kvantilis.

Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q–kvantilis van, mégpedig az a szám, ahol az F_ξ függvény átugorja a q számot.

Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor ezek az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallumba eső számok, és a q–kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Módusz:

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor az x_i szám **módusza** ξ–nek, ha x_i–t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$\mathsf{P}\{\xi = x_i\} = \sup_k \mathsf{P}\{\xi = x_k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor az x szám **módusza** ξ–nek, ha x globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f_\xi(y).$$

7. Fontos eloszlások

Bernoulli–eloszlás

A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét valószínűségi változó;
lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi = 1\} = p, \qquad \mathsf{P}\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást p **paraméterű Bernoulli–eloszlásnak** nevezünk. Nyilván

$$\mathsf{E}\,\xi = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p,$$

$$\mathsf{E}(\xi^2) = p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 = p,$$

$$\operatorname{var}\xi = \mathsf{E}(\xi^2) - (\mathsf{E}\,\xi)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Binomiális eloszlás

n független kísérlet
A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$
A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$
diszkrét valószínűségi változó;
lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{–edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli–eloszlásúak. Ezért

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi_1 + \cdots + \mathsf{E}\,\xi_n = np,$$

$$\operatorname{var}\xi = \operatorname{var}\xi_1 + \cdots + \operatorname{var}\xi_n = np(1-p).$$

Módusza: $\lfloor (n+1)p \rfloor$, és még $\lfloor (n+1)p \rfloor - 1$ is, ha $(n+1)p$ egész szám.

Hipergeometrikus eloszlás

Egy urnában M piros és $N-M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leqslant N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \leqslant M$, és $n-k \leqslant N-M$, eloszlása

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

$$\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{–edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók M/N paraméterű Bernoulli–eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \neq j$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi_i = 1, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

Nyilván

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\xi_1 + \cdots + \mathsf{E}\,\xi_n = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\xi &= \operatorname{cov}(\xi,\xi) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}\xi_i + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j), \end{aligned}$$

ahol

$$\operatorname{var}\xi_i = \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right).$$

Mivel $i \neq j$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi_i = 1,\, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_i = 0,\, \xi_j = 0\} = \frac{(N-M)(N-M-1)}{N(N-1)},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_i = 1,\, \xi_j = 0\} = \mathsf{P}\{\xi_i = 0,\, \xi_j = 1\}$$

$$= \frac{M(N-M)}{N(N-1)},$$

ezért

$$\mathsf{P}\{\xi_i \cdot \xi_j = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_i = 1,\, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_i \cdot \xi_j = 0\} = 1 - \frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

azaz $\xi_i \cdot \xi_j$ is Bernoulli–eloszlású, így

$$\mathsf{E}(\xi_i \xi_j) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

amiből

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) &= \mathsf{E}(\xi_i\xi_j) - \mathsf{E}\,\xi\,\mathsf{E}\,\eta \\ &= \frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \frac{M^2}{N^2} = \frac{M(N-M)}{N^2(N-1)}.\end{aligned}$$

Végül

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\xi &= n\cdot\frac{M}{N} - (n^2-n)\frac{M(N-M)}{N^2(N-1)} \\ &= n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}.\end{aligned}$$

Negatív binomiális eloszlás:

A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$, melyre $0 < p < 1$.
$\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek száma;
lehetséges értékei: $1, 2, \ldots, \infty$,
eloszlása: $\mathsf{P}\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p \cdot (1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Várható értéke:

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2},$$

így

$$\mathsf{E}\,\xi = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Hasonlóan

$$\mathsf{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2},$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)''$$

$$= \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$\mathsf{E}(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\operatorname{var} \xi = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Legyen $\eta := \xi - 1$.

Ekkor η lehetséges értékei: $0, 1, 2, \ldots$, eloszlása:

$$\mathsf{P}\{\eta = k\} = p \cdot (1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Örökifjú tulajdonság:

$$\mathsf{P}\{\eta \geqslant k + \ell \,|\, \eta \geqslant k\} = \mathsf{P}\{\eta \geqslant \ell\}, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

ugyanis

$$\mathsf{P}\{\eta \geqslant k + \ell \,|\, \eta \geqslant k\} = \frac{\mathsf{P}\{\eta \geqslant k + \ell,\, \eta \geqslant k\}}{\mathsf{P}\{\eta \geqslant k\}}$$

ahol $\mathsf{P}\{\eta \geqslant k + \ell,\, \eta \geqslant k\} = \mathsf{P}\{\eta \geqslant k + \ell\}$, és

$$\mathsf{P}\{\eta \geqslant k\} = \sum_{j=k}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta = j\} = \sum_{j=k}^{\infty} p \cdot (1-p)^j$$

$$= \frac{p \cdot (1-p)^k}{1 - (1-p)} = (1-p)^k,$$

így valóban

$$\mathsf{P}\{\eta \geqslant k + \ell \,|\, \eta \geqslant k\} = \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = \mathsf{P}\{\eta \geqslant \ell\}.$$

Poisson–eloszlás:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

ahol $\lambda > 0$.

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda,$$

$$\mathsf{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[k + k(k-1)\Big] \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}$$

$$= \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2,$$

$$\operatorname{var}\xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Egyenletes eloszlás az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazon:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$\mathsf{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N}$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N}$$

$$= \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\operatorname{var}\xi = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4}$$

$$= \frac{N^2-1}{12}.$$

Egyenletes eloszlás az $[a,b]$ intervallumon: részintervallumba esés valószínűsége a részintervallum hosszával arányos.
Eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqslant b. \end{cases}$$

Abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha} \quad x \in [a,b], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $\xi = a + (b-a) \cdot \eta$ ahol η egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, hiszen

$$\mathsf{P}\{\eta < y\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi - a}{b-a} < y\right\} = \mathsf{P}\{\xi < a + (b-a)y\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad y \leqslant 0, \\ y & \text{ha} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha} \quad y \geqslant 1. \end{cases}$$

Nyilván

$$\mathsf{E}\,\eta = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{E}(\eta^2) = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{var}\eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$\mathsf{E}\,\xi = a + (b-a)\mathsf{E}\,\eta = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$\operatorname{var}\xi = (b-a)^2 \operatorname{var}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciális eloszlás:

abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

ahol $\lambda > 0$.

$$\mathsf{E}\,\xi = \int_0^\infty x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Parciális integrálással

$$g(x) := x, \qquad h'(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

választással

$$g'(x) = 1, \qquad h(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

így

$$\mathsf{E}\,\xi = \Big[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Hasonlóan

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\xi^2) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}, \\
\operatorname{var}\xi &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Normális eloszlás:

abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

$$\mathsf{E}\,\xi = m, \qquad \mathrm{var}\,\xi = \sigma^2,$$

ferdesége 0, csúcsossága 3.

Eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $\xi = \sigma \cdot \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, azaz paraméterei $m = 0$, $\sigma = 1$ így eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) := F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R},$$

melynek értékei táblázatokban megtalálhatók.

Többdimeziós normális eloszlás:

Legyen $m \in \mathbb{R}^k$ és $\Sigma \in \mathbb{R}^{k\times k}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix, azaz $\Sigma^\top = \Sigma$, és $x^\top \Sigma x > 0$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ esetén. Ekkor $\exists\, \Sigma^{-1}$, és az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \mathrm{e}^{-(x-m)^\top \Sigma^{-1}(x-m)/2}$$

függvény pozitív és

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

ezért van olyan $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ valószínűségi vektorváltozó, melynek f sűrűségfüggvénye. Ennek az eloszlását $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$ **paraméterű normális eloszlásnak** nevezzük.

Jelölése: $\xi \sim \mathcal{N}_k(m, \Sigma)$.

Belátható, hogy ξ_i normális eloszlású $(m_i, \Sigma_{i,i})$ paraméterekkel, és

$$\mathsf{E}\,\xi_i = m_i, \qquad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \Sigma_{i,j}.$$

Ha $k = 2$, akkor

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{var}\xi_1 & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) & \operatorname{var}\xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

ahol $\sigma_1^2 := \operatorname{var}\xi_1$, $\sigma_2^2 := \operatorname{var}\xi_2$ és

$$\varrho := \operatorname{corr}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\operatorname{var}\xi_1 \cdot \operatorname{var}\xi_2}}.$$

Ekkor $\det(\Sigma) = (1 - \varrho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$, így $\varrho \neq \pm 1$, és

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\varrho\sigma_1\sigma_2 \\ -\varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 - \varrho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\varrho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix},$$

ezért

$$(x-m)^\top \Sigma^{-1}(x-m)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_i-m_i)(\Sigma^{-1})_{i,j}(x_j-m_j)$$

$$= \frac{1}{1-\varrho^2}\bigg(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$+ \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\bigg).$$

Végülis a sűrűségfüggvény

$$f(x_1,x_2) = g(x_1-m_1, x_2-m_2),$$

ahol

$$g(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Szintgörbék: $f(x_1, x_2) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$, ezért

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$+ \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} = C,$$

ahol $C := -\ln\left(2c\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}\right)$.

Ezek ellipszisek, melyeknek a középpontja

$$(m_1, m_2),$$

tengelyeik pedig párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

(Magasabb dimenzióban a szintfelületek ellipszoidok.)

Tulajdonságok:

Ha $\eta \sim \mathcal{N}_k(c, D)$ és $a \in \mathbb{R}^\ell$, $B \in \mathbb{R}^{\ell \times k}$, akkor
$$a + B\eta \sim \mathcal{N}_\ell\Big(a + Bc, BDB^\top\Big).$$

Ha $\xi \sim \mathcal{N}_k(m, \Sigma)$, akkor
$$\xi = m + B\eta,$$
ahol $\eta \sim \mathcal{N}_k(0, I)$, és $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ olyan, hogy
$$B \cdot B^\top = \Sigma.$$

Ha $\xi \sim \mathcal{N}_k(m_\xi, \Sigma_\xi)$ és $\eta \sim \mathcal{N}_k(m_\eta, \Sigma_\eta)$ függetlenek, akkor
$$\xi + \eta \sim \mathcal{N}_k(m_\xi + m_\eta, \Sigma_\xi + \Sigma_\eta).$$

Ha $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ és $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell)$ olyanok, hogy (ξ, η) normális eloszlású, akkor ξ és η pontosan akkor függetlenek, ha korrelálatlanok, azaz
$$\mathrm{cov}(\xi_i, \eta_j) = 0$$
tetszőleges $i = 1, \ldots, k$ és $j = 1, \ldots, \ell$ esetén.

8. Nagy számok törvényei

Markov–egyenlőtlenség:
Ha a ξ valószínűségi változó nemnegatív, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}\,\xi}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás: ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\} \geqslant \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k\}$$

$$\geqslant \varepsilon \sum_{k\,:\,x_k \geqslant \varepsilon} \mathsf{P}\{\xi = x_k\} = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos nemnegatív valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor $f_\xi(x) = 0$ ha $x \leqslant 0$, ezért

$$\mathsf{E}\,\xi = \int_0^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\varepsilon^\infty x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \varepsilon \int_\varepsilon^\infty f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$

Csebisev–egyenlőtlenség:
Tetszőleges ξ valószínűségi változó és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\operatorname{var}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás: A Markov–egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{E}\xi| \geqslant \varepsilon\} = \mathsf{P}\{(\xi - \mathsf{E}\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2\}$$

$$\leqslant \frac{\mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}\xi)^2\Big]}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{var}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Bernoulli-féle nagy számok törvénye

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{k_n(A)}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} p \qquad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

melyet **sztochasztikus konvergenciának** nevezünk.

Mivel $k_n(A) = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független p paraméterű Bernoulli–eloszlásúak, ezért ez a tétel speciális esete a következőnek.

Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek ξ_1, ξ_2, ... páronként korrelálatlan, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek véges a második momentumuk. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \mathsf{E}\xi_1\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{E}\xi_1 \qquad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás:

Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$

Nyilván

$$\mathsf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\,\xi_k = \mathsf{E}\,\xi_1,$$

$$\mathsf{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathsf{var}\,S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{var}\,\xi_k = \frac{\mathsf{var}\,\xi_1}{n},$$

ezért a Csebisev–egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mathsf{E}\xi_1\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\mathsf{var}\,\xi_1}{n\varepsilon^2} \to 0, \qquad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A bizonyítás alapján a Bernoulli–féle nagy számok törvényével kapcsolatban azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2},$$

így például ha azt akarjuk elérni, hogy egy szabályos érmét dobálva a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1–nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől, akkor a fentiek alapján

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant 0,1\right\}\leqslant\frac{1}{4\cdot 0.1^2\cdot n},$$

így a követelmény biztosan teljesül, ha

$$\frac{1}{4\cdot 0.1^2\cdot n}\leqslant 0.05,\qquad \text{azaz } n\geqslant 500,$$

vagyis az érmével legalább 500-szor kell dobni. (Ez egy meglehetősen durva közelítés.)

Mivel $k_n(A)$ binomiális eloszlású, mégpedig

$$\mathsf{P}\{k_n(A) = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ha $k = 0, 1, \ldots, n$, ezért a Bernoulli–féle nagy számok törvénye azzal ekvivalens, hogy

$$\sum_{k:\,\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to 1, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Nagy számok erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik a várható értékük. Ekkor

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = \mathsf{E}\xi_1\right\} = 1.$$

9. Centrális határeloszlás–tételek

Jelölje φ_{m,σ^2} az (m, σ^2) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvényét, azaz

$$\varphi_{m,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Lokális határeloszlás–tétel

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Legyen $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ egy olyan valós számsorozat, melyre

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2/3}\psi_n = 0.$$

Ekkor

$$\sup_{k\,:\,|k-np|\leqslant\psi_n} \left| \frac{\mathsf{P}\{k_n(A) = k\}}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} - 1 \right| \to 0$$

ha $n \to \infty$.

Jelölje Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét:

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Moivre–Laplace–tétel

n független kísérlet

A esemény, $p := \mathsf{P}(A)$

A gyakorisága: $k_n(A)$

Ekkor

$$\sup_{-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty} \left| \mathsf{P}\left\{ \frac{k_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in [a, b) \right\} - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| \to 0$$

ha $n \to \infty$.

Ezért ha egy szabályos érmét dobálunk, akkor a fejek számának relatív gyakoriságára tetszőleges $a > 0$ esetén érvényes

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{a}{2\sqrt{n}}, \frac{a}{2\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$= \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Mivel a

$$2\Phi(a) - 1 = 0.95, \qquad \frac{a}{2\sqrt{n}} = 0.1$$

összefüggésekből $a \approx 1.96$ és $n \approx 96$ adódik, így

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0,1\right\} \approx 0.95 \quad \text{ha} \quad n \approx 96,$$

tehát elég körülbelül 96-szor dobni egy szabályos érmével ahhoz, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől.

A Moivre–Laplace tételből következik, hogy speciálisan

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{k_n(A)-np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right\} = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ez a tétel speciális esete a következőnek.

Centrális határeloszlás–tétel

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek véges a második momentumuk. Legyen

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{\sqrt{\operatorname{var} S_n}} < x\right\} = \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Szimbolikusan:

$$\frac{S_n - \mathsf{E}\, S_n}{\sqrt{\operatorname{var} S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

10. A statisztikában használatos fontos eloszlások

Ha $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$\chi_k^2 := \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_k^2$$

eloszlását $\boldsymbol{\chi_k^2}$**–eloszlásnak** nevezzük, melynek **szabadsági foka** $\boldsymbol{k}$.

Szemifaktoriális:

$$n!! := \begin{cases} n(n-2)(n-4)\ldots 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ n(n-2)(n-4)\ldots 2, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

A χ_k^2–eloszlás abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\chi_k^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ c_k x^{(k-2)/2} \mathrm{e}^{-x/2}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

ahol

$$c_k := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (k-2)!!}, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\ \dfrac{1}{2 \cdot (k-2)!!}, & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases}$$

Speciálisan

$$f_{\chi_1^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, \mathrm{e}^{-x/2}, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$f_{\chi_2^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-x/2}, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$f_{\chi_3^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x/2}, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

Tehát a χ_2^2–eloszlás megegyezik az $1/2$ paraméterű exponenciális eloszlással.

$\mathsf{E}(\chi_k^2) = k$, $\mathrm{var}(\chi_k^2) = 2k$.

A χ_k^2–eloszlás módusza $\begin{cases} k-2 & \text{ha} \quad k \geqslant 2, \\ 0 & \text{ha} \quad k = 1. \end{cases}$

Bizonyítás:

Nyilván χ_1^2 eloszlásfüggvénye

$$
\begin{aligned}
F_{\chi_1^2}(x) &= \mathsf{P}\{\chi_1^2 < x\} = \mathsf{P}\{\eta_1^2 < x\} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \mathsf{P}\{|\eta_1| < \sqrt{x}\}, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ha $x > 0$, akkor

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(|\eta_1| < \sqrt{x}) &= \mathsf{P}(-\sqrt{x} < \eta_1 < \sqrt{x}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u = G(\sqrt{x}),
\end{aligned}
$$

ahol

$$
G(y) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \mathrm{e}^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u.
$$

Ezért $x > 0$ esetén

$$
\begin{aligned}
f_{\chi_1^2}(x) &= F'_{\chi_1^2}(x) = G'(\sqrt{x}) \, \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \mathrm{e}^{-x/2} \, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \, \mathrm{e}^{-x/2}.
\end{aligned}
$$

Továbbá χ_2^2 sűrűségfüggvénye

$$f_{\chi_2^2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi_1^2}(y) f_{\chi_1^2}(x-y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \mathrm{e}^{-y/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-y)}} \mathrm{e}^{-(x-y)/2}\,\mathrm{d}y, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Tehát ha $x > 0$, akkor

$$f_{\chi_2^2}(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-x/2} \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(x-y)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-x/2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z(1-z)}} = c \cdot \mathrm{e}^{-x/2},$$

ahol $y = xz$ helyettesítést hajtottunk végre.
A c konstans abból határozható meg, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi_2^2}(x)\,\mathrm{d}x = c \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2c.$$

Tehát végülis

$$f_{\chi_2^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-x/2}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Az általános eset teljes indukcióval bizonyítható. Ha feltesszük, hogy az állítás igaz k–ra, akkor

$$f_{\chi^2_{k+1}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi^2_k}(y) f_{\chi^2_1}(x-y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x c_k y^{(k-2)/2} \mathrm{e}^{-y/2} c_1 (x-y)^{-1/2} \mathrm{e}^{-(x-y)/2}\,\mathrm{d}y$$

ha $x > 0$, és $f_{\chi^2_{k+1}}(x) = 0$, ha $x \leqslant 0$. Ezért ha $x > 0$, akkor

$$f_{\chi^2_{k+1}}(x) = c_1 c_k \mathrm{e}^{-x/2} \int_0^x y^{(k-2)/2} (x-y)^{-1/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= c_1 c_k \mathrm{e}^{-x/2} \int_0^1 (xz)^{(k-2)/2} [x(1-z)]^{-1/2} x\,\mathrm{d}z$$

$$= d_{k+1} x^{(k-1)/2} \mathrm{e}^{-x/2},$$

ahol d_{k+1} abból határozható meg, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi^2_{k+1}}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= d_{k+1} \int_0^{\infty} x^{(k-1)/2} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$
\begin{aligned}
I_{k+1} :=& \int_0^\infty x^{(k-1)/2} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x \\
=& \Big[x^{(k-1)/2}(-2)\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\
& + (k-1)\int_0^\infty x^{(k-3)/2} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x \\
=& (k-1)I_{k-1},
\end{aligned}
$$

így

$$
d_{k+1} = \frac{1}{I_{k+1}} = \frac{1}{(k-1)I_{k-1}} = \frac{d_{k-1}}{k-1},
$$

amiből $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ és $c_2 = 1/2$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$
d_{k+1} = c_{k+1}.
$$

Ha η és χ_k^2 független valószínűségi változók standard normális, illetve χ_k^2–eloszlással, akkor

$$\mathrm{t}_k := \frac{\eta}{\sqrt{\chi_k^2/k}}$$

eloszlását **$\mathbf{t}_{\boldsymbol{k}}$–eloszlásnak (Student–eloszlásnak)** nevezzük, melynek **szabadsági foka $\boldsymbol{k}$**.
A t_k–eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_{\mathrm{t}_k}(x) = \frac{\widetilde{c}_k}{\left(\dfrac{x^2}{k}+1\right)^{(k+1)/2}},$$

ahol

$$\widetilde{c}_k := \begin{cases} \dfrac{(k-1)!!}{\pi\sqrt{k}\cdot(k-2)!!}, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\[2ex] \dfrac{(k-1)!!}{2\sqrt{k}\cdot(k-2)!!}, & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases}$$

Speciálisan

$$f_{\mathrm{t}_1}(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}, \qquad f_{\mathrm{t}_2}(x) = \frac{1}{(x^2+2)^{3/2}}.$$

Tehát a t_1–eloszlás megegyezik a Cauchy–eloszlással.

Lemma:

Legyenek ξ és ζ abszolút folytonos, független valószínűségi változók f_ξ illetve f_ζ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ/ζ abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi/\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| f_\xi(xv) f_\zeta(v) \, \mathrm{d}v.$$

Bizonyítás. Nyilván ξ/ζ eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F_{\xi/\zeta}(x) = \mathsf{P}(\xi/\zeta < x) &= \iint\limits_{u/v<x} f_{\xi,\zeta}(u,v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{xv}^{\infty} f_\xi(u) f_\zeta(v) \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{xv} f_\xi(u) f_\zeta(v) \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f_{\xi/\zeta}(x) = F'_{\xi/\zeta}(x) &= \int_{-\infty}^{0} (-v) f_\xi(xv) f_\zeta(v) \, \mathrm{d}v \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} v f_\xi(xv) f_\zeta(v) \, \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Bizonyítás:

Először meghatározzuk $\sqrt{\chi_k^2/k}$ eloszlásfüggvényét:

$$F_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(x) = \mathsf{P}(\sqrt{\chi_k^2/k} < x)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \mathsf{P}(\chi_k^2 < kx^2), & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

Tehát ha $x > 0$, akkor $F_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(x) = F_{\chi_k^2}(kx^2)$, ami deriválható: $F'_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(x) = 2kxf_{\chi_k^2}(kx^2)$, ezért $\sqrt{\chi_k^2/k}$ abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(x) = 2kxc_k(kx^2)^{(k-2)/2}\mathrm{e}^{-kx^2/2}$$

ha $x > 0$, és $f_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(x) = 0$ ha $x \leqslant 0$. Ezért ha $x > 0$, akkor

$$f_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(x) = 2k^{k/2}c_kx^{k-1}\mathrm{e}^{-kx^2/2}.$$

Ebből a Lemma felhasználásával

$$f_{\mathrm{t}_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| f_\eta(xv) f_{\sqrt{\chi_k^2/k}}(v)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^\infty v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2v^2/2} 2k^{k/2} c_k v^{k-1} \mathrm{e}^{-kv^2/2}\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{2k^{k/2}c_k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty v^k \mathrm{e}^{-(x^2+k)v^2/2}\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{2k^{k/2}c_k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{y^k}{(x^2+k)^{k/2}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \frac{\mathrm{d}y}{(x^2+k)^{1/2}}$$

$$= \frac{\widetilde{c}_k}{\left(\dfrac{x^2}{k}+1\right)^{(k+1)/2}},$$

ahol

$$\widetilde{c}_k = \frac{2c_k}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^\infty y^k \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Ha $k = 1$, akkor $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ és

$$\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \left[-\mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{y=0}^{y=\infty} = 1,$$

így $\widetilde{c}_1 = 1/\pi$, ezért $f_{\mathrm{t}_1}(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.

Ha $k = 2$, akkor $c_2 = 1/2$ és

$$\int_0^\infty y^2 \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

így $\widetilde{c}_2 = (1/2)^{3/2}$, ezért

$$f_{\mathrm{t}_2}(x) = \frac{1}{(x^2+2)^{3/2}}.$$

Továbbá $k \geqslant 2$ esetén parciális integrálással

$$y^{k-1} \cdot y\mathrm{e}^{-y^2/2}$$

felbontással $\left(-\mathrm{e}^{-y^2/2}\right)' = y\mathrm{e}^{-y^2/2}$ alapján

$$\int_0^\infty y^k \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \left[-y^{k-1}\mathrm{e}^{-y^2/2}\right]_{y=0}^{y=\infty}$$
$$+ (k-1)\int_0^\infty y^{k-2}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$
$$= (k-1)\int_0^\infty y^{k-2}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y,$$

ugyanis L'Hospital szabállyal bebizonyítható, hogy

$$\lim_{y\to\infty} y^{k-1}\mathrm{e}^{-y^2/2} = 0.$$

Ha $k \geqslant 3$ páratlan, akkor

$$\int_0^\infty y^k \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= (k-1)(k-3)\ldots 2\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= (k-1)!!,$$

amiből

$$\widetilde{c}_k = \frac{2}{\sqrt{2\pi k}}\cdot\frac{(k-1)!!}{\sqrt{2\pi}\cdot(k-2)!!} = \frac{(k-1)!!}{\pi\sqrt{k}\cdot(k-2)!!}.$$

Ha $k \geqslant 4$ páros, akkor

$$\int_0^\infty y^k \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= (k-1)(k-3)\ldots 3\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= (k-1)!!\sqrt{2\pi}/2,$$

amiből

$$\widetilde{c}_k = \frac{2}{\sqrt{2\pi k}}\cdot\frac{(k-1)!!\sqrt{2\pi}/2}{2\cdot(k-2)!!} = \frac{(k-1)!!}{2\sqrt{k}\cdot(k-2)!!}.$$

Ha χ_k^2 és χ_ℓ^2 független valószínűségi változók χ_k^2–, illetve χ_ℓ^2–eloszlással, akkor

$$\mathsf{F}_{k,\ell} := \frac{\chi_k^2/k}{\chi_\ell^2/\ell}$$

eloszlását **$\boldsymbol{\mathsf{F}_{k,\ell}}$–eloszlásnak** nevezzük, melynek **szabadsági fokai $\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{\ell}$**.

Az $\mathsf{F}_{k,\ell}$–eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_{\mathsf{F}_{k,\ell}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \overline{c}_{k,\ell} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{k}{\ell}\,x\right)^{(k-2)/2}}{\left(\dfrac{k}{\ell}\,x+1\right)^{(k+\ell)/2}}, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

ahol

$$\overline{c}_{k,\ell} := \begin{cases} \dfrac{k\cdot(k+\ell-2)!!}{\pi\ell\cdot(k-2)!!\,(\ell-2)!!}, & \text{ha } k \text{ és } \ell \text{ páratlan}, \\ \dfrac{k\cdot(k+\ell-2)!!}{2\ell\cdot(k-2)!!\,(\ell-2)!!}, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Bizonyítás:

Először meghatározzuk χ_n^2/n eloszlásfüggvényét:

$$F_{\chi_n^2/n}(x) = \mathsf{P}(\chi_n^2/n < x)$$
$$= \mathsf{P}(\chi_n^2 < nx) = F_{\chi_n^2}(nx),$$

ami deriválható: $F'_{\chi_n^2/n}(x) = nf_{\chi_n^2}(nx)$, ezért χ_n^2/n abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\chi_n^2/n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ nc_n(nx)^{(n-2)/2}\mathsf{e}^{-nx/2}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ebből a Lemma felhasználásával

$$f_{\mathsf{F}_{k,\ell}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| f_{\chi_k^2/k}(xv) f_{\chi_\ell^2/\ell}(v)\,\mathsf{d}v$$

$$= \int_0^\infty v c_k k^{k/2}(xv)^{(k-2)/2}\mathsf{e}^{-kxv/2} c_\ell \ell^{\ell/2} v^{(\ell-2)/2}\mathsf{e}^{-\ell v/2}\,\mathsf{d}v$$

$$= c_k c_\ell k^{k/2}\ell^{\ell/2} x^{(k-2)/2} \int_0^\infty v^{(k+\ell-2)/2}\mathsf{e}^{-(kx+\ell)v/2}\,\mathsf{d}v$$

$$= c_k c_\ell k^{k/2}\ell^{\ell/2} \frac{2^{(k+\ell)/2} x^{(k-2)/2}}{(kx+\ell)^{(k+\ell)/2}} \int_0^\infty y^{(k+\ell-2)/2}\mathsf{e}^{-y}\,\mathsf{d}y.$$

Ha $k+\ell$ páratlan, akkor parciális integrálással

$$\int_0^\infty y^{(k+\ell-2)/2} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{k+\ell}{2} - 1\right)\left(\frac{k+\ell}{2} - 2\right)\ldots\frac{3}{2}\int_0^\infty y^{1/2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y,$$

ahol

$$\int_0^\infty y^{1/2}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{u}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-u^2/2}u\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^\infty \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ha $k+\ell$ páros, akkor

$$\int_0^\infty y^{(k+\ell-2)/2} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{k+\ell}{2} - 1\right)\left(\frac{k+\ell}{2} - 2\right)\ldots 1\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y,$$

ahol

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 1.$$

11. Feltételes eloszlás, feltételes várható érték, feltételes variancia

A esemény, $\mathsf{P}(A) > 0$

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ–nek az A–ra vonatkozó **feltételes eloszlása:**

$$\mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

feltételes várható értéke:

$$\mathsf{E}(\xi|A) := \sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\}$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz

$$\sum_k |x_k| \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\} < \infty,$$

feltételes varianciája:

$$\mathrm{var}(\xi|A) := \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}(\xi|A))^2|A\Big]$$

$$= \mathsf{E}(\xi^2|A) - \Big[\mathsf{E}(\xi|A)\Big]^2$$

$$= \sum_k x_k^2 \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\} - \left(\sum_k x_k \cdot \mathsf{P}\{\xi = x_k \,|\, A\}\right)^2.$$

Példa:

Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi a dobott számok eltérésének feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a dobott számok összege ℓ ?

Jelölje a dobott számokat ξ és η. Nyilván $\ell \in \{2, 3, \dots, 12\}$ és

$$\mathrm{P}(\xi + \eta = \ell) = \begin{cases} \dfrac{\ell - 1}{36} & \text{ha } 2 \leqslant \ell \leqslant 7, \\[2ex] \dfrac{13 - \ell}{36} & \text{ha } 7 \leqslant \ell \leqslant 12. \end{cases}$$

Továbbá a $|\xi - \eta|$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4,5.

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=0 \mid \xi+\eta=2)=1,$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=1 \mid \xi+\eta=3)=1,$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=0 \mid \xi+\eta=4)=\frac{1}{3},$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=2 \mid \xi+\eta=4)=\frac{2}{3},$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=1 \mid \xi+\eta=5)=\frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=3 \mid \xi+\eta=5)=\frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=0 \mid \xi+\eta=6)=\frac{1}{5},$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=2 \mid \xi+\eta=6)=\frac{2}{5},$$

$$\mathsf{P}(|\xi-\eta|=4 \mid \xi+\eta=6)=\frac{2}{5}.$$

Egy tetszőleges ξ valószínűségi változónak az A–ra vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvénye**

$$F_{\xi|A}(x) := \mathsf{P}\{\xi < x \,|\, A\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ha létezik olyan $f_{\xi|A}$ függvény, melyre

$$F_{\xi|A}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi|A}(u)\, du$$

teljesül tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $f_{\xi|A}$ függvényt ξ–nek az A–ra vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük. Ekkor ξ–nek az A–ra vonatkozó **feltételes várható értéke**

$$\mathsf{E}(\xi|A) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|A}(x)\, \mathrm{d}x$$

amennyiben ez az integrál abszolút konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_{\xi|A}(x)\, \mathrm{d}x < \infty,$$

feltételes varianciája:

$$\mathrm{var}(\xi|A) := \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}(\xi|A))^2|A\Big]$$

$$= \mathsf{E}(\xi^2|A) - \Big[\mathsf{E}(\xi|A)\Big]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi|A}(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|A}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Példa:

Legyen ξ standard normális eloszlású, és $A := \{\xi \geqslant 0\}$. Ekkor $\mathsf{P}(A) = 1/2$, és

$$F_{\xi|A}(x) = \frac{\mathsf{P}(0 \leqslant \xi < x)}{\mathsf{P}(\xi > 0)}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqslant 0, \\ 2\mathsf{P}(0 \leqslant \xi < x) & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ha $x > 0$, akkor tehát

$$F_{\xi|A}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u.$$

Megjegyzés: ha $\eta := |\xi|$, akkor

$$F_\eta(x) = F_{\xi|A}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi változó $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénnyel

ξ feltételes sűrűségfüggvénye az $\eta = y$ feltételre nézve:

$$f_{\xi|\eta}(x|y) := \begin{cases} \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} & \text{ha } f_\eta(y) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } f_\eta(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_η az η sűrűségfüggvénye.

ξ feltételes eloszlásfüggvénye az $\eta = y$ feltételre nézve:

$$F_{\xi|\eta}(x|y) := \int_{-\infty}^{x} f_{\xi|\eta}(u|y)\,\mathrm{d}u,$$

ξ feltételes várható értéke az $\eta = y$ feltételre nézve:

$$\mathsf{E}(\xi|\eta = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x,$$

ξ feltételes varianciája az $\eta = y$ feltételre nézve:

$$\mathsf{var}(\xi|\eta = y) := \mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}(\xi|\eta = y))^2|\eta = y\Big]$$

$$= \mathsf{E}(\xi^2|\eta = y) - \Big[\mathsf{E}(\xi|\eta = y)\Big]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

ξ regressziós görbéje az η feltételre nézve:

az $y \mapsto \mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ függvény.

Ez minimalizálja az $\mathsf{E}\Big[(\xi - f(\eta))^2\Big]$ mennyiséget, azaz ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\mathsf{E}\Big[f(\eta)^2\Big] < \infty$, akkor

$$\mathsf{E}\Big[(\xi - \mathsf{E}(\xi|\eta))^2\Big] \leqslant \mathsf{E}\Big[(\xi - f(\eta))^2\Big].$$

Példa:

Ha (ξ, η) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó és $\mathsf{var}(\eta) > 0$, akkor

$$\mathsf{E}(\xi \mid \eta = y) = \mathsf{E}\xi + \frac{\mathsf{cov}(\xi, \eta)}{\mathsf{var}(\eta)}(y - \mathsf{E}\eta),$$

azaz a regressziós görbe egy egyenes.

Továbbá ξ feltételes eloszlása az $\eta = y$ feltételre vonatkozóan normális eloszlás, mégpedig

$$\mathcal{N}\left(\mathsf{E}(\xi \mid \eta = y), \mathsf{var}(\xi) - \frac{(\mathsf{cov}(\xi, \eta))^2}{\mathsf{var}(\eta)}\right).$$

Tehát

$$\mathsf{var}(\xi \mid \eta = y) = \mathsf{var}(\xi) - \frac{(\mathsf{cov}(\xi, \eta))^2}{\mathsf{var}(\eta)},$$

ami nem függ y–tól!

Teljes várható érték tétele (teljes eseményrendszerre vonatkozólag)
Ha az A_1, A_2, ... pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, ξ valószínűségi változó és $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, akkor

$$\mathsf{E}(\xi) = \sum_k \mathsf{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathsf{P}(A_k).$$

Bizonyítás. Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \ldots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\sum_k \mathsf{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathsf{P}(A_k) \\
&= \sum_k \sum_j x_j \mathsf{P}\{\xi = x_j \mid A_k\} \cdot \mathsf{P}(A_k) \\
&= \sum_k \sum_j x_j \mathsf{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_k) \\
&= \sum_j x_j \sum_k \mathsf{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_k) \\
&= \sum_j x_j \mathsf{P}\{\xi = x_j\} = \mathsf{E}\xi.
\end{aligned}$$

Abszolút folytonos ξ valószínűségi változó esetén a bizonyítás hasonlóan végezhető el.

Példa:

Szabályos dobókockával addig dobunk, míg az első 6–os megjelenik.

$\xi :=$ az ehhez szükséges dobások száma

$A_k :=$ az első dobás k

$$\mathsf{E}\,\xi = \sum_{k=1}^{6} \mathsf{E}(\xi \mid A_k) \cdot \mathsf{P}(A_k)$$

Mivel

$$\mathsf{E}(\xi \mid A_k) = \begin{cases} 1 + \mathsf{E}\,\xi & \text{ha} \quad k \leqslant 5, \\ 1 & \text{ha} \quad k = 6, \end{cases}$$

ezért

$$\mathsf{E}\,\xi = \frac{1}{6}\Big(1 + 5(1 + \mathsf{E}\,\xi)\Big),$$

amiből

$$\mathsf{E}\,\xi = 6.$$

Teljes várható érték tétele (valószínűségi változóra vonatkozólag)

Ha (ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi változó $f_{\xi,\eta}$ sűrűségfüggvénnyel és $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, akkor

$$\mathsf{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}(\xi \mid \eta = y) \cdot f_\eta(y)\,\mathrm{d}y.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}(\xi \mid \eta = y) \cdot f_\eta(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x|y)\,\mathrm{d}x \right) \cdot f_\eta(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \mathsf{E}\,\xi.
\end{aligned}$$

Teljes valószínűség tétele (valószínűségi változóra vonatkozólag)

Ha η abszolút folytonos valószínűségi változó f_η sűrűségfüggvénnyel és B esemény, akkor

$$\mathsf{P}(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(B \mid \eta = y) \cdot f_\eta(y) \,\mathsf{d}y,$$

ahol

$$\mathsf{P}(B \mid \eta = y) := \mathsf{E}(\mathbb{1}_B \mid \eta = y).$$