Logika évfolyam zárthelyi dolgozat

2002. V. 24.

A csoport

Ponthatárok (%-ban):

0 - 30: elégtelen (1)
31 - 47: elégséges (2)
48 - 64: közepes (3)
65 - 81: jó (4)
82 - kb. 120: jeles (5)

1. feladat:

$\exists x \forall y Q(x, y) \rightarrow \exists x \exists z \forall v R(x, y, z, v)$ nem formula / zárt / nyitott - melyek a kötött változók?

$A \rightarrow B \rightarrow C \wedge \neg B \rightarrow B$ nem formula / diszjunkciós / konjunkciós / implikáció - melyik a fő műveleti jel?

Igaz-e, hogy a $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ formula logikailag igaz?

- Sorolja fel a prímkomponenseit!
- Írja fel a formula értéktábláját és ennek alapján indokolja a válaszát!

Megoldás:

- nyitott, a kötött változók: x, z, v;
- implikációs, a fő műveleti jel az első $\rightarrow$;
- igen;
  - a prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x P(x), \forall x Q(x).$.
  - az értéktábla és az indoklás:

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall x P(x)$	$\forall x Q(x)$	$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
i	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	i

Ha a lehetséges interpretációkat nézzük, csak ez a négy értékkombináció lehetséges, ezekben az esetekben viszont a formula értéke i.

2. feladat:

Formalizálja az alábbi feltételeket:

- Ha az órám jól jár, akkor beérek a gyakorlatra, de csak akkor.
- Ha nem, jön időben a busz, akkor a gyakorlatra sem érek be.
- Az biztos nem igaz, hogy a busz is időben jön és az órám is jól jár.
- Ha nem igaz, hogy az órám jól jár, akkor a busz időben jön.

Mi a legszűkebb következmény, mint leképezés és mint formula?

Levonhatjuk-e azt a következtetést a feltételekből, hogy a busz időben jön?
Ennek megmutatására használja a rezolúciós kalkulust! Oldja meg lineáris input rezolúciós levezetéssel!

Adja meg a feltételformulákat olyan alakban, hogy azok a bizonyítás-elméleti levezetéshez felhasználhatók legyenek!

Megoldás:

O - jól jár az órám, B - a busz időben jön, G - beérek a gyakorlatra.

- $O \leftrightarrow G \equiv (O \to G) \wedge (G \to O) \equiv (\neg O \vee G) \wedge (\neg G \vee O),$
- $\neg B \to \neg G \equiv B \vee \neg G,$
- $\neg(B \wedge O) \equiv \neg B \vee \neg O \equiv B \to \neg O \equiv O \to \neg B,$
- $\neg O \to B \equiv O \vee B.$

Legszűkebb következmény:

B	G	O	$O \leftrightarrow G$	$\neg B \to \neg G$	$\neg(B \wedge O)$	$\neg O \to B$	legszűkebb köv. (leképezés)	legszűkebb köv. (formula)
i	i	i	i	i	h		h	
i	i	h	h				h	
i	h	i	h				h	
i	h	h	i	i	i	i	i	$B \wedge \neg G \wedge \neg O$
h	i	i	i	h			h	
h	i	h	h				h	
h	h	i	h				h	
h	h	h	i	i	i	h	h	

A klózhalmaz: $\{\neg O \vee G, \neg G \vee O, B \vee \neg G, \neg B \vee \neg O, O \vee B\} \cup \{\neg B\}.$

Egy lineáris input levezetés:

1. $\neg B$
2. $B \vee \neg G$
3. $\neg G$ rez(1,2)
4. $\neg O \vee G$
5. $\neg O$ rez(3,4)
6. $O \vee B$
7. B rez(5,6)
8. $\neg B$
9. $\square$ rez(7,8).

A feltételformulák megadása bizonyítás-elméleti levezetéshez:

$$O \to G, G \to O, \neg B \to \neg G, B \to \neg O, O \to \neg B, \neg O \to B.$$

3. feladat:

Adott a következő $\{i,h\}^3 \to \{i,h\}$ leképezés:

X	Y	Z		
i	i	i	i	
i	i	h	**h**	$\neg X \vee \neg Y \vee Z$
i	h	i	**h**	$\neg X \vee Y \vee \neg Z$
i	h	h	i	
h	i	i	**h**	$X \vee \neg Y \vee \neg Z$
h	i	h	**h**	$X \vee \neg Y \vee Z$
h	h	i	**h**	$X \vee Y \vee \neg Z$
h	h	h	i	

Adja meg a leképezést leíró KKNF-et!
Majd egyszerűsítse!

Megoldás:

A leképezést leíró KKNF:

$$(\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$$

A lehetséges egyszerűsítések:
a) $\neg Y \vee Z$ (1.,4.)
b) $Y \vee \neg Z$ (2.,5.)
c) $X \vee \neg Y$ (3.,4.)
d) $X \vee \neg Z$ (3.,5.)

Nincs több egyszerűsítés!

Az egyszerűsítés eredménye: $(\neg Y \vee Z) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (X \vee \neg Z)$.

4. feladat:

Írja át az alábbi formulát
- Prenex formába,
- Skolem normál formába!

Írja fel a formulát elsőrendű klózok konjunkciójaként!
Adja meg az elsőrendű klózhalmazt!

A formula: $\forall x \exists y (Q(x,y) \leftrightarrow \neg \exists z (T(x,z) \wedge T(z,y)))$.

Adja meg a Herbrand univerzumot!
Adja meg a Herbrand bázist!

Megoldás:

Prenex:

$$\forall x \exists y (Q(x,y) \leftrightarrow \neg \exists z (T(x,z) \wedge T(z,y)))$$
$$\forall x \exists y ([Q(x,y) \to \neg \exists z (T(x,z) \wedge T(z,y))] \wedge [\neg \exists z (T(x,z) \wedge T(z,y)) \to Q(x,y)])$$
$$\forall x \exists y ([\neg Q(x,y) \vee \neg \exists z (T(x,z) \wedge T(z,y))] \wedge [\exists z (T(x,z) \wedge T(z,y)) \vee Q(x,y)])$$
$$\forall x \exists y ([\neg Q(x,y) \vee \forall z (\neg T(x,z) \vee \neg T(z,y))] \wedge [\exists z (T(x,z) \vee Q(x,y)) \wedge (T(z,y) \vee Q(x,y))])$$
$$\forall x \exists y \forall z ([\neg Q(x,y) \vee (\neg T(x,z) \vee \neg T(z,y))] \wedge [\exists v (T(x,v) \vee Q(x,y)) \wedge (T(v,y) \vee Q(x,y))])$$
$$\forall x \exists y \forall z \exists v ([\neg Q(x,y) \vee \neg T(x,z) \vee \neg T(z,y)] \wedge [T(x,v) \vee Q(x,y)] \wedge [T(v,y) \vee Q(x,y)]).$$

Skolem: (y helyett f(x), v helyett g(x,z) Skolem függvények bevezetése után)

$$\forall x \forall z ([\neg Q(x,f(x)) \vee \neg T(x,z) \vee \neg T(z,f(x))] \wedge$$
$$\wedge [T(x,g(x,z)) \vee Q(x,f(x))] \wedge [T(g(x,z),f(x)) \vee Q(x,f(x))]).$$

A formula, mint elsőrendű klózok konjunkciója:

$$\forall x \forall z [\neg Q(x,f(x)) \vee \neg T(x,z) \vee \neg T(z,f(x))] \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall z [T(x,g(x,z)) \vee Q(x,f(x))] \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall z [T(g(x,z),f(x)) \vee Q(x,f(x))]$$

Az elsőrendű klózhalmaz:

$$\{\neg Q(x,f(x)) \vee \neg T(x,z) \vee \neg T(z,f(x)),$$
$$T(x,g(x,z)) \vee Q(x,f(x)),$$
$$T(g(x,z),f(x)) \vee Q(x,f(x))\}.$$

$$H_\infty = \{a, f(a), g(a,a), f(f(a)), \ldots\}.$$
$$H_B = \{Q(a,a), T(a,a), Q(a,f(a)), \ldots\}.$$

5. feladat:

Állapítsa meg, hogy a $\forall x \exists y P(y,x)$ és a $\exists y \forall x P(y,x)$ formulákat leíró nyelvnek mi a típusa!

Hány lehetséges interpretációja lehet ennek a nyelvnek az $\{a,b\}$ univerzumon?

Legyen három lehetséges interpretáció $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

	σ_1	σ_2	σ_3
$P(a,a)$	i	i	h
$P(a,b)$	h	h	h
$P(b,a)$	i	h	i
$P(b,b)$	h	i	h

Értékelje ki a formulákat mindhárom interpretációban!
Adja meg a szemantikus fát, és jelölje be rajta a fenti három interpretációt!

Van-e olyan σ interpretáció, amelyben $(\forall x \exists y P(y,x))^{\sigma} = h$ és $(\exists y \forall x P(y,x))^{\sigma} = i$?

Megoldás:

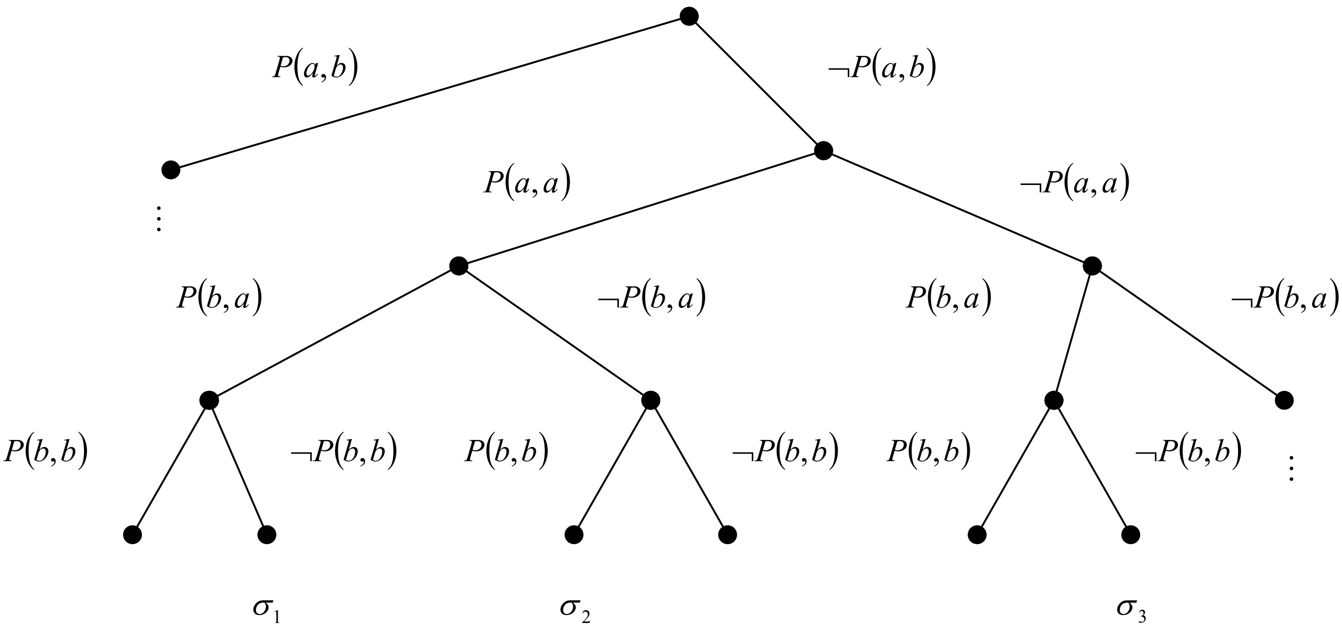
A formulákat leíró nyelv típusa: (2,-).
A lehetséges interpretációk száma az $\{a,b\}$ univerzumon: 16.

A formulák kiértékelése a különböző interpretációkban:

$$(\forall x \exists y P(y,x))^{\sigma_1} = h \text{ és } (\exists y \forall x P(y,x))^{\sigma_1} = h,$$
$$(\forall x \exists y P(y,x))^{\sigma_2} = i \text{ és } (\exists y \forall x P(y,x))^{\sigma_2} = h,$$
$$(\forall x \exists y P(y,x))^{\sigma_3} = h \text{ és } (\exists y \forall x P(y,x))^{\sigma_2} = h.$$

A kérdéses σ interpretáció nem létezik, ugyanis $(\exists y \forall x P(y,x))^{\sigma} = i$ csak a $P(a,a) = P(a,b) = P(b,a) = P(b,b) = i$ interpretációban lehet, itt azonban $(\forall x \exists y P(y,x))^{\sigma} = i$.

A szemantikus fa:



6. feladat:

Jelölje: $AF(a, f)$ - a apja f-nek,
$M(c, d)$ - d magasabb c-nél,
$B(h, g)$ - h-nak barátja g relációkat.

Feltételek:
- A fiúk magasabbak apjuknál.
- János apja Péternek.
- Péternek van olyan barátja, aki magasabb, mint ő.
- János nem apja Péter egyetlen barátjának sem.
- A magasabb reláció tranzitív.

Következmény:
- Van olyan személy, aki magasabb Jánosnál és János nem apja neki.

Formalizálja a megadott relációkat, és adja meg azt az elsőrendű klózhalmazt, amelyet használni kell, ha rezolúciós kalkulussal dolgozunk!

Lássa be elsőrendű rezolúcióval (szorgalmi feladat: alaprezolúcióval Herbrand univerzumon), hogy a megadott feltételeknek a megadott következmény valóban következménye!

Megoldás:

A feltételek:
- $\forall x \forall y (AF(x, y) \rightarrow M(x, y))$,
- $AF(János, Péter)$,
- $\exists x (B(Péter, x) \wedge M(Péter, x))$,
- $\forall x (B(Péter, x) \rightarrow \neg AF(János, x))$,
- $\forall x \forall y \forall z (M(x, y) \wedge M(y, z) \rightarrow M(x, z))$.

A következmény:
- $\exists x (M(János, x) \wedge \neg AF(János, x))$.

Az elsőrendű klózhalmaz:

$$\{\neg AF(x, y) \vee M(x, y),$$
$$AF(János, Péter),$$
$$B(Péter, C),$$
$$M(Péter, C),$$
$$\neg B(Péter, x) \vee \neg AF(János, x),$$
$$\neg M(x, y) \vee \neg M(y, z) \vee M(x, z)\} \cup \{\neg M(János, x) \vee AF(János, x)\}.$$

$H_\infty = \{János, Péter, C\}.$

Egy lehetséges rezolúciós levezetés:

1. $\neg M(János, x) \vee AF(János, x)$
2. $\neg B(Péter, x) \vee \neg AF(János, x)$
3. $\neg B(Péter, x) \vee \neg M(János, x)$ rez(1,2)
4. $\neg M(x_1, y_1) \vee \neg M(y_1, z_1) \vee M(x_1, z_1)$
5. $\neg B(Péter, x) \vee \neg M(János, y_1) \vee M(y_1, x)$ rez(3,4) $\{x_1 / János, z_1 / x\}$
6. $B(Péter, C)$
7. $\neg M(János, y_1) \vee \neg M(y_1, x)$ rez(5,6) $\{X / c\}$
8. $M(Péter, C)$
9. $\neg M(János, Péter)$ rez(7,8) $\{y_1 / Péter\}$
10. $\neg AF(x, y) \vee M(x, y)$
11. $\neg AF(János, Péter)$ rez(9,10) $\{x / János, y / Péter\}$
12. $AF(János, Péter)$
13. $\square$ rez(11,12).

Alaprezolúció Herbrand univerzumon:

1. $\neg M(János, C) \vee AF(János, C)$
2. $\neg B(Péter, C) \vee \neg AF(János, C)$
3. $\neg B(Péter, C) \vee \neg M(János, C)$ rez(1,2)
4. $B(Péter, C)$
5. $\neg M(János, C)$ rez(3,4)
6. $\neg M(János, Péter) \vee \neg M(Péter, C) \vee M(János, C)$
7. $\neg M(János, Péter) \vee \neg M(Péter, C)$ rez(5,6)
8. $M(Péter, C)$
9. $\neg M(János, Péter)$ rez(7,8)
10. $\neg AF(János, Péter) \vee M(János, Péter)$
11. $\neg AF(János, Péter)$ rez(9,10)
12. $AF(János, Péter)$
13. $\square$ rez(11,12).