PÉNZÜGYI SZÁMÍTÁSOK

I. Kamatos kamat számítása

Kamat: a kölcsönök után az adós által időarányosan fizetendő pénzösszeg.
Kamatláb: 100 pénzegység egy meghatározott időre, a **kamatidő**re vonatkozó kamata.

Pl.: ha az évi kamatláb 12%, akkor 100 Ft egy évi kamata 12 Ft.

p: kamat
k_0: kölcsönösszeg
I: kamatláb

$$i = \frac{I}{100}$$

A kamat n ≤ 360 napra: $p = \dfrac{k_0 \cdot I \cdot n}{360 \cdot 100} = \dfrac{k_0 \cdot i \cdot n}{360}$

Megjegyzés: a hónapokat 30, az éveket 360 napnak számítjuk.

Egyszerű kamatnak hívjuk a kamatot, ha azt csak egy kamatidőre vagy annak egy részére számítjuk.
Pl.: 20000 Ft 60 napra 12% kamatlábbal számolva
$k = k_0 + k_0\, i\, n/360 = 20000 + 20000 \cdot 0{,}12 \cdot 60/360 = 20400$.
Amikor valamely k_0 tőke kamatait minden kamatidő végén a tőkéhez csatoljuk (a következő kamatidőben már ez is kamatozik) és k_0 több kamatidőben történő növekedését vizsgáljuk, **kamatos kamat számítás**ról beszélünk.

Legyen $r := 1 + i$; k_0 összeg növekedése:

Kamatidő (időszak)	Tőke az időszak elején	Egyszerű kamat	Tőke az időszak végén
1	k_0	$k_0 i$	$k_1 = k_0 + k_0\, i = k_0(1+i) = k_0 r$
2	$k_0 r$	$k_0 ri$	$k_2 = k_0 r + k_0 ri = k_0 r(1+i) = k_0 r^2$
…			
n	$k_0 r^{n-1}$	$k_0 r^{n-1} i$	$k_n = k_0 r^{n-1} + k_0 r^{n-1} i = k_0 r^{n-1}(1+i) = k_0 r^n$

k_n: felnövekedett érték
r: **kamattényező**
n = 1, 2, …

Képletben:

$$\mathbf{k_n = k_0 \cdot r^n}$$

Példa: Az év elején az OTP-nél 7%-os kamatra elhelyezett 30.000 Ft a hatodik év végére:
$k_6 = 30.000 \cdot 1{,}07^6 = 45021{,}91$ Ft értékre növekszik.

I. Jelen idő

Példa: Egy gépet szeretnénk vásárolni, két ajánlatunk van:

A) Az ár 175.000 Ft és a leszállításkor kell fizetni

B) Leszállításkor 70.000 Ft-ot kell fizetni, majd egy év múlva 60.000 Ft-ot, és újabb egy év múlva ismét 60.000 Ft-ot.

Melyik ajánlat a kedvezőbb, ha évi 12% kamatlábbal számolunk?

A megoldáshoz választanunk kell egy időpontot (az ún. **jelen időt**), amikor a két összeget összehasonlítjuk.

1. Legyen a jelenidő a leszállítás időpontja.

A ajánlat: 175.000 Ft

B ajánlat: 70.000 Ft +

Mekkora összeggel kell most rendelkeznünk, hogy 12% kamatláb mellett 1 év múlva 60.000 Ftunk legyen?

$$k_0 \cdot 1{,}12^1 = 60.000$$

$$k_0 = 60.000/1{,}12^1 = 53571{,}42 \text{ Ft} +$$

illetve 2 év múlva 60.000 Ft legyen?

$$k_0 = 60.000/1{,}12^2 = 47831{,}63 \text{ Ft}$$

= 171403,05 Ft < 175.000 Ft, tehát a B ajánlat a kedvezőbb!

2. Legyen a jelen idő a leszállítás utáni 2. év.

Az A ajánlat ún. jelen értéke:

$$175.000 \cdot 1{,}12^2 = 219520 \text{ Ft}$$

B ajánlat:

$$70.000 \cdot 1{,}12^2 + 60.000 \cdot 1{,}12 + 60.000 = 215.008 \text{ Ft}$$

Természetesen így is a B ajánlat a kedvezőbb!

Példa: Hány százalékos kamatláb mellett lesz a két ajánlat azonos?

Legyen a jelen idő a lejárat időpontja (2.év):

$$175.000 \cdot r^2 = 70.000 \cdot r^2 + 60.000 \cdot r + 60.000$$

$$105.000r^2 - 60.000r - 60.000 = 0$$

$$7r^2 - 4r - 4 = 0$$

$$r = 1{,}093 \Rightarrow I \approx 9\%$$

Megjegyzés: Ez azt is jelenti, hogy 9%-nál kisebb kamatláb mellett az A , 9%-nál nagyobb kamatláb esetén a B ajánlat a kedvezőbb!

II. Diszkontálás

Mekkora összeget kell elhelyeznünk évi 12%-os kamatra, hogy 5 év múlva 60.000 Ft álljon rendelkezésünkre? (Mekkora az 5 év múlva felvett 60.000 Ft jelen értéke?)

$$k_0 = \frac{60000}{1{,}12^5} = 60000\left(\frac{1}{1{,}12}\right)^5 = 34045{,}6$$

Ezt a jelen értéket diszkontált értéknek nevezzük. Tehát 60.000 Ft 5 évre diszkontált értéke 12%-os kamatláb mellett 34045,6 Ft.

A $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}$ számot **diszkonttényező**nek nevezzük.

Így $k_0 = k_n \cdot \frac{1}{r^n} = k_n \cdot v^n$

Megjegyzés: Ha a diszkontálást évente megfelelő %-kal való csökkentéssel végezzük, akkor a százaléklàb nem azonos az eredeti kamatlábbal!

Pl.: 100 Ft 5%-os kamatláb mellett 1 év alatt 105 Ft-ra növekedik fel. Tehát 105 Ft diszkontált értéke 1 évre 5%-os kamatláb mellett 100 Ft.

$$105 \cdot \frac{1}{1{,}05} = 100$$

DE a 105 Ft-ot nem 5%-kal kell csökkenteni, hogy 100Ft legyen, hanem

$$100 = 105 - 5 = 105 - 105 \cdot 5/105 =$$
$$105\,(1 - 0{,}0476) = 105\,(1 - 4{,}76/100)$$

tehát a csökkenés 4,76%-os.

Általában, ha a kamatláb I%-os és r = 1 + i a kamattényező, és D jelöli azt a kamatlábat, amellyel a diszkontáláskor csökkenteni kell az összeget, akkor:

$$k_0 = k_1\left(1 - \frac{D}{100}\right) = k_1(1-d) = k_1\frac{1}{r} = k_1\frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{D}{100}$$

így

$$1 - d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

adódik.

A D számot **diszkontláb**nak nevezzük.

A példában d = 0,05/1,05 = 0,0476, így D = 4,76%.

Képletben:

$$\mathbf{k_0 = k_n \cdot (1 - d)^n}$$

III. Infláció

Példa: 10.000 Ft-ot 10 évre 12%-os kamatláb mellett kölcsönadunk. Tegyük fel, hogy évi 9%-os az árszínvonal emelkedése. Kérdés, hogy a 10. év végén mekkora a rendelkezésünkre álló tőke vásárlóértéke?

A tőke felnövekedett értéke:

$$k_{10} = 10.000 \cdot 1{,}12^{10} = 31058{,}50 \text{ Ft}$$

A jelenleg 10.000 Ft-ba kerülő áru 10 év múlva:

$$10.000 \cdot 1{,}09^{10} = 23673{,}63 \text{ Ft}$$

A tőke vásárló értéke:

$$\frac{31058{,}50\,Ft}{23673{,}63\,Ft} = \left(\frac{1{,}12}{1{,}09}\right)^{10} = 1{,}31 - szeresére$$ növekedett, azaz 31%-kal növekedett.

Általánosan: I%-os évi kamatláb
F%-os évi árszínvonal emelkedés esetén a tőke vásárlóértéke:

$$\left(\frac{1+\frac{I}{100}}{1+\frac{F}{100}}\right)^n = \left(\frac{1+i}{1+f}\right)^n - szeresére$$ növekszik.

IV. Járadékszámítás

Az egyenlő időközökben fizetett összegek sorozatát **járadék**nak nevezzük.

Törlesztőjáradék: a fizető a fenálló tartozását akarja kiegyenlíteni

Gyűjtőjáradék: pénzösszeg gyűjtése a cél

Az egyszerűség érdekében feltesszük, hogy:

1. a befizetési időközök megegyeznek a kamatidővel
2. minden alkalommal ugyanakkora összeget fizetünk be.

Ha a kamatidő 1 év, az egy-egy alkalommal befizetett összeget **annuitás**nak navezzük.

Gyűjtőjáradék

Évi **I%**-os kamatláb mellett **n** éven át minden év elején befizetünk **a** összeget. Kérdés: az utolsó befizetés után egy évvel mekkora összeg áll rendelkezésünkre?
Jelölje S_n a keresett összeget. Válasszuk jelen időnek az n-edik év végét.

$$S_n = a \cdot r + a \cdot r^2 + \ldots + a \cdot r^n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Példa: Négy éven át minden év elején beteszünk a bankba 100 ezer Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz a negyedik év végén, ha a bank 7%-os éves kamattal számol?

V. Törlesztőjáradék

Tegyük fel, hogy V_n összegű kölcsönt veszünk fel **I%**-os kamatra, amelyet **n** évig évi **a** Ft-os annuitással törlesztünk. Mi az összefüggés a fenti adatok között? (tegyük fel, hogy a kölcsönt év elején vettük fel, és minden év január 1-én fizetjük be az **a** összeget, először a kölcsön felvétele után egy évvel!)

A kölcsön felvételének időpontjára diszkontálunk:

$$V_n=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\ldots+\frac{a}{r^n}=\frac{a}{r}\cdot\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\frac{1}{r}-1}=\frac{a}{r}\frac{\frac{1-r^n}{r^n}}{\frac{1-r}{r}}=\frac{a}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

$$V_n=\frac{a}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

Példa: 300 ezer Ft-os kölcsönt kapunk 10 évre, a hitelkamat 18%. Évente mennyi törlesztőrészletet kell fizetni?